

7. feladatsor, 2024 tavasz

Számelmélet (tanár, 4. félév)

1. Milyen maradékot ad 39-cel osztva 14^{24} , illetve 14^{48} , illetve 14^{49} ?
2.
 - Mutassuk meg, hogy minden egész szám ötödik hatványa ugyanolyan maradékot ad 30-cal osztva, mint az eredeti szám.
 - Hány gyöke van $(\text{mod } 30)$ az $x^5 - x$ polinomnak? Itt 1 maradékosztály 1 gyöknek felelhet meg.
Miért is lehet ez?
 - Hány gyöke van $(\text{mod } 8)$ az $x^2 - x$ polinomnak?
3. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $2^{6n+2} \equiv 4 \pmod{18}$.
4. Mutassuk meg, hogy $2^{6n+2} + 3$ minden n természetes számra osztható 19-cel.
5. Mi az utolsó két számjegye a 13^{441} , illetve a 13^{439} számnak?
6. Bizonyítsuk be, hogy ha $(ab, 42) = 1$, akkor $504 \mid a^6 - b^6$.
7. Egy nagyon ráérós ember összeadta a 2018^{2018} számjegyeit, majd az így nyert számra ugyanezt megcsinálta. Ezt a lépést még néhányszor megismételve végül egy egyjegyű számot kapott. Mi ez a szám?
8. Mennyi a redukált maradékosztályok egy reprezentánsainak szorzata $(\text{mod } n)$?
9.
 - Mennyi az n -edik egységgyökök összege?
 - Mennyi az n -edik egységgyökök szorzata?
 - Mennyi az primitív n -edik egységgyökök szorzata?
 - Mennyi az $x^3 - 2x^3 + 3x - 1$ polinom gyökeinek az összege?
 - Mennyi az $x^3 - 2x^3 + 3x - 1$ polinom gyökeinek az négyzetösszege?
10. Egy erdei tisztás körül 21 fa áll, mindegyiken egy mókus ül. A mókusok össze szeretnének gyűlni egy fán, de csak úgy változtathatják helyüket, hogy mindig egyszerre két mókus ugrik át egy szomszédos fára, még hozzá ellenkező körülményes irányban. Össze tudnak-e gyűlni a mókusok egy fán? Mi a helyzet, ha az egyik fát (és azzal együtt az egyik mókust is) kivágják?