5. feladatsor, 2024 tavasz

Számelmélet (tanár, 4. félév)

1. Keressünk a 7-tel kongruens számokat $\pmod{10}$.
2. Melyik állítás igaz a következők közül?
   (a) $a^2 \equiv b^2 \pmod{31}$ esetén $a \equiv \pm b \pmod{31}$ is igaz.
   (b) $a^2 \equiv b^2 \pmod{35}$ esetén $a \equiv \pm b \pmod{35}$ is igaz.
   (c) $a^2 \equiv b^2 \pmod{27}$ esetén $a \equiv \pm b \pmod{27}$ is igaz.
3. Írjunk fel egy nem megoldható lineáris kongruenciát.
4. Oldjuk meg a következőt Euklideszi algoritmussal:
$$222x \equiv 306 \pmod{87}.$$
5. Hogyan lehet ügyesen megoldani az alábbi kongruenciákat:
   - $202x \equiv 157 \pmod{203}$;
   - $109x \equiv 157 \pmod{203}$;
   - $309x \equiv 453 \pmod{617}$;
   - $58x \equiv 145 \pmod{203}$;
   - $58x \equiv 146 \pmod{203}$;
6. Lássuk be kongruencia segítségével, hogy $a - b \mid a^n - b^n$, ahol a, b egészek, n pedig egy pozitív egész.
7. Lássuk be, hogy $\pmod{6}$ kongruens $a^3 - b^3$ és $a - b$.
8. Keressük meg a $25x + 35y = 1000$ diofantikus egyenlet egyik megoldását. Hogyan lehet ennek alapján megtalálni az összes megoldást?
9. (a) Lássuk be, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $d(ab) = d(a)d(b)$.
   (b) Lássuk be, hogy ha a és b nem relatív prímek, akkor $d(ab) < d(a)d(b)$.
10. Legyen $F_n := 2^{2^n} + 1$. Ekkor $F_n = F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2$
11. Készítsünk és oldjunk is meg egy feladatot a sokfejű sárkányok fejének levágásáról.