2. feladatsor

Számelmélet (tanár, 4. félév)

2024 tavasz

1. Az $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ azonosság (egyik) általánosításaként igazoljuk az $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$ azonosságot. Tegyuk meg ezt n szerinti indukcioval is.
2. Keressünk hasonló felbontásokat $x^{2k+1} + y^{2k+1}$, illetve $x^{2k} - y^{2k}$ esetén, mindkét esetben $x + y$ legyen az egyik tényező. (Az egyik lehetőség, ha az előző azonosságban y helyére $-y$-t írunk, és különválasztjuk a páros, illetve páratlan n esetet.)
3. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b egész és n, k természetes számra
$$(a)\ a - b \mid a^n - b^n\,; \quad (b)\ a + b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}\,; \quad (c)\ a + b \mid a^{2k} - b^{2k}\,.$$
4. Prím vagy összetett?
$$(a)\ 14^{101} - 1; \quad (b)\ 2^{2015} - 1; \quad (c)\ 2^{99} + 1; \quad (d) 2^{100} + 1.$$
5. Osszuk el maradékosan az összes lehetséges módon ± 25 és a ± 27 számokat ± 5-tel. (Ez tehát 8 feladat, akár több megoldással.)
6. **Csoportos feladat.** Válasszunk két ötjegyű számot. Számítsuk ki a legnagyobb közös osztót, a csapat fele prímtényezős felbontással, amit a középiskolában tanultunk, a csapat másik fele Euklideszi algoritmussal.
7. (a) Milyen maradékot adhat egy négyzetszám hárommal osztva?
   (b) Mutassunk rá példával arra, hogy a páros számok körében nem érvényes a maradékos osztás tétele.
   (c) Milyen maradékot adhat egy négyzetszám néggyel osztva?
   (d) Milyen maradékot adhat egy páratlan négyzetszám nyolccal osztva?
8. Hányszor fordul elő, hogy egy négyzetszám
   (a) 1-gyel nagyobb
   (b) 1-gyel kisebb

   egy másik négyzetszám háromszorosánál?
9. Bizonyítsuk be, hogy $3^{123} - 2^{123}$ és $3^{124} - 11 \cdot 2^{124}$ is osztható 19-cel.
10. Igaz-e, hogy $3 + \sqrt{2} \mid 4 - \sqrt{2}$ az $a + b\sqrt{2}$ alakú számkörben, ahol a és b egész számok? Hogyan végeznénk el az osztást általában, ha racionális együtthatókat is megengednénk?