A következő feladatokban $\Phi \subset E$ gyökrendszer, (Nem tesszük fel, hogy Lie algebrából kaptuk!), W jelöli Φ Weyl-csoportját, valamint $\Pi \subset \Phi^+ \subset \Phi$, ahol Π fundamentális gyökök egy rendszere, Φ^+ pedig az általa meghatározott pozitív gyökök egy rendszere.

63. Az $E \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha \right)$ (ahol $P_\alpha = \alpha^\perp$) összefüggő komponenseit Weyl kamráknak nevezzük. Jelölje $\mathcal{C}$ A Weyl-kamrák halmazát.
    (a) Igazoljuk, hogy $|\mathcal{C}|$ megegyezik a különböző fundamentális rendszerek számával.
    (b) Sőt, a Weyl-csoport hatása a Weyl-kamrákon ekvivalens a Φ különböző fundamentális rendszerein vett hatásával, azaz $\exists\, \varphi : \mathcal{C} \to \{\Pi \subset \Phi \mid \Pi \text{ bázisa } \Phi\text{-nek}\}$ bijekció, melyre
    $$\varphi(g(C)) = g(\varphi(C)) \text{ minden } C \in \mathcal{C},\ g \in W\text{-re.}$$
64. (a) Igazoljuk, hogy ha $\alpha \in \Phi^+$, de $\alpha \notin \Pi$, akkor van olyan $\beta \in \Pi$, melyre $\alpha - \beta \in \Phi^+$.
    (b) Mutassuk meg, hogy minden $\beta \in \Phi^+$ felírható $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ alakban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Pi$, és $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s \in \Phi^+$ minden $1 \le s \le k$-ra.
65. Igazoljuk, hogy egyetlen olyan $g \in W$ létezik, melyre $\ell(g)$ maximális értékű. Mennyi ennek az elemnek a rendje?
66. Mutassuk meg, hogy ha az előző feladatban szereplő (legnagyobb hosszú) $g \in W$ tetszőleges redukált felírása tartalmazza a w_α-t az összes $\alpha \in \Pi$-re.
67. Tegyük fel, hogy $g \in W$ az E valamely hipersíkjára való tükrözés. Igazoljuk, hogy $g = w_\alpha$ alkalmas $\alpha \in \Phi$-re.
68. Tegyük fel, hogy a $g \in W$ felírható t darab fundamentális tükrözés ($\{w_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ elemeinek) szorzataként. Igazoljuk, hogy $t \equiv \ell(g) \pmod 2$.
69. $0 \neq \alpha \in E$-re vezessük be a $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ jelölést. Definiáljuk egy $\Phi \subset E$ gyökrendszer duálisát:
    $$\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}.$$
    Igazoljuk, hogy egy gyökrendszer duálisa is gyökrendszer. Mutassuk meg, hogy Φ és $\Phi^\vee$ Weyl-csoportja izomorfak.
70. Legyen $\Phi^\vee$ a Φ duálisa, és $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Pi\}$. Igazoljuk, hogy $\Pi^\vee$ gyökök egy fundamentális rendszere $\Phi^\vee$-ben.
71. Legyenek $\Pi \subset \Phi \subset E$, $\Pi' \subset \Phi' \subset E'$ izomorf gyökrendszerek, és $\varphi : E \to E'$ az előadáson definiált izomorfizmus. (Azaz, $\varphi : \Pi \to \Pi'$ bijekció, melyre $\langle \varphi(\alpha_i), \varphi(\alpha_j) \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ tetszőleges $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$-re. Igazoljuk, hogy $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \Phi$-re is fennáll.