Lie Algebrák, 9. Előadás

2024. április 25.

Gyökrendszerek

Emlékeztető: Gyökrendszer

- Legyen E egy véges dimenziós valós euklideszi tér;
- $\alpha, \beta \in E$-re vezessük be a $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ jelölést.

Definíció. Egy $\Phi \subset E$ részhalmazt gyökrendszernek hívjuk, ha a következők teljesülnek.

1. Φ véges halmaz, $0 \notin \Phi$ és $\langle \Phi \rangle = E$;
2. Ha $\alpha \in \Phi$, akkor $\pm\alpha$ az α összes Φ-beli skalárszorosa;
3. Ha $\alpha \in \Phi$, akkor az $\alpha^{\perp}$-re vett w_α tükrözés Φ-t saját magába viszi, azaz bármely $\alpha, \beta \in \Phi$-re
$$w_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi;$$
4. $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ minden $\alpha, \beta \in \Phi$-re.

Állítás. (HF) Ha $\alpha, \beta \in \Phi$-re $(\alpha, \beta) > 0$, akkor $\alpha - \beta \in \Phi$; Ha $(\alpha, \beta) < 0$, akkor $\alpha + \beta \in \Phi$.

Fundamentális gyökök, pozitív gyökök

Definíció. Legyen $\Phi \subset E$ gyökrendszer. Azt mondjuk, hogy $\Pi \subset \Phi$ fundamentális gyökrendszere Φ-nek, (vagy Φ egy bázisa), ha a következő két tulajdonság teljesül.

1. Π bázisa E-nek;
2. Minden $\beta \in \Phi$-re $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \cdot \alpha$, ahol $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ és vagy minden $k_\alpha \geq 0$, vagy minden $k_\alpha \leq 0$.

- Ha $\Pi \subset \Phi$ fundamentális gyökrendszer, akkor ez megad egy $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ felbontást, ahol

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \{\beta = \textstyle\sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha \in \Phi \,|\, k_\alpha \geq 0 \ \forall\, \alpha \in \Pi\}, \\ \Phi^- &= \{\beta = \textstyle\sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha \in \Phi \,|\, k_\alpha \leq 0 \ \forall\, \alpha \in \Pi\}. \end{aligned}$$

- A Φ^+ elemeit pozitív gyököknek, a Φ^- elemeit negatív gyököknek nevezzük (a Π-re nézve)
- Nyilvánvalóan $\Phi^- = -\Phi^+$.

Tétel. Minden $\Phi \subset E$ gyökrendszer tartalmaz fundamentális rendszert.

Konstrukció:

- Minden $\alpha \in \Phi$-re tekintsük a $P_\alpha = \alpha^\perp$ hipersíkot, és válasszunk egy $\gamma \in E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha)$ vektort. (Ilyen γ létezik.)
- Legyen

$$\Phi_\gamma^+ := \{\alpha \in \Phi \,|\, (\alpha, \gamma) > 0\} \text{ és } \Phi_\gamma^- := \{\alpha \in \Phi \,|\, (\alpha, \gamma) < 0\}.$$

  A γ választása folytán $\Phi = \Phi_\gamma^+ \cup \Phi_\gamma^-$. (diszjunkt unió)
- Legyen

$$\Pi_\gamma := \{\beta \in \Phi_\gamma^+ \,|\, \nexists\, \beta_1, \beta_2 \in \Phi_\gamma^+, \text{ amire } \beta = \beta_1 + \beta_2\}.$$

Tétel. Π_γ fundamentális rendszere Φ-nek, és a Π_γ által meghatározott pozitív gyökök halmaza Φ_γ^+. Végezetül, Φ minden fundamentális rendszere előáll Π_γ alakban alkalmas $\gamma \in E \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha\right)$-re.

Bizonyítás.

1. Ha $\beta \in \Phi_\gamma^+$, akkor $\beta = \sum_{\alpha\in\Pi_\gamma} k_\alpha \alpha$ alkalmas $k_\alpha \geq 0$ egészekre.
   Biz.
   - Tegyük fel, hogy van olyan $\beta \in \Phi_\gamma^+$, mely nem áll elő így. Az ilyen elemek közül válasszunk olyan β-t, amire $(\gamma, \beta) > 0$ minimális.
   - $\beta \notin \Pi_\gamma$, így $\beta = \beta_1 + \beta_2$, ahol $\beta_1, \beta_2 \in \Phi_\gamma^+$. Ekkor
   $$(\gamma, \beta) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2), \text{ ahol } (\gamma, \beta_1) > 0, \text{ és } (\gamma, \beta_2) > 0.$$
   - Így $(\gamma, \beta_1) < (\gamma, \beta)$ és $(\gamma, \beta_2) < (\gamma, \beta)$, tehát a feltevés szerint β_1, β_2 előállnak a kívánt alakban. De akkor β is előáll. □
2. Ha $\alpha, \beta \in \Pi_\gamma$, $\alpha \neq \beta$, akkor $(\alpha, \beta) \leq 0$.

   Biz. Ha $(\alpha, \beta) > 0$, akkor $\alpha - \beta \in \Phi$, így
   - vagy $\alpha - \beta \in \Phi_\gamma^+ \Rightarrow \alpha = (\alpha - \beta) + \beta \notin \Pi_\gamma$,
   - vagy $\beta - \alpha \in \Phi_\gamma^+ \Rightarrow \beta = (\beta - \alpha) + \alpha \notin \Pi_\gamma$. □

3. Π_γ lineárisan független.
   Biz.
   - Feltéve az ellenkezőjét, léteznek $\emptyset \neq \Pi_1, \Pi_2 \subset \Pi_\gamma$ diszjunkt részhalmazok továbbá $0 < s_\alpha, t_\beta$ valós számok minden $\alpha \in \Pi_1, \beta \in \Pi_2$-re, hogy

$$\sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in \Pi_2} t_\beta \beta.$$

   - Ekkor

$$0 \leq \Big(\sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha \alpha, \sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha \alpha \Big) = \Big(\sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha \alpha, \sum_{\beta \in \Pi_2} t_\beta \beta \Big) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{s_\alpha t_\beta}_{>0} \underbrace{(\alpha, \beta))}_{\leq 0} \leq 0,$$

   így $\sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha \alpha = 0$.
   - De akkor $0 = (\gamma, \sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha \in \Pi_1} s_\alpha (\gamma, \alpha) > 0$. Ellentmondás. $\square$

4. Π_γ fundamentális gyökök egy rendszere Φ-ben.
Biz. Mivel $\Phi = \Phi_\gamma^+ \cup (-\Phi_\gamma^+)$, az állítás következik a bizonyítás 1. és 3. részéből. □

5. Ha $\Pi \subset \Phi$ fundamentális gyökök egy tetszőleges rendszere, akkor $\Pi = \Pi_\gamma$ valamely $\gamma \in E \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha\right)$-re.
Biz.
   - Mivel Π bázisa E-nek, van olyan $\gamma \in E$, amire $(\gamma, \alpha) > 0$ minden $\alpha \in \Pi$-re.
   - Legyen Φ^+ a Π által definiált pozitív gyökök halmaza. Ekkor $\Phi^+ \subset \Phi_\gamma^+$ és $\Phi^- = -\Phi^+ \subset \Phi_\gamma^-$, így $\Phi^+ = \Phi_\gamma^+$ és $\Phi^- = \Phi_\gamma^-$.
   - Ha $\beta = \beta_1 + \beta_2 \in \Pi$, ahol $\beta_1, \beta_2 \in \Phi_\gamma^+ = \Phi^+$, akkor Π összefüggő, ami ellentmondás. Így $\Pi \subset \Pi_\gamma$.
   - Mivel $|\Pi| = \dim E = |\Pi_\gamma|$, következik, hogy $\Pi = \Pi_\gamma$. □

□

Megjegyzés. A 3. pontban azt bizonyítottuk, hogy ha $X \subset E$ benne van E egy nyílt félterében, továbbá X bármely két eleme által bezárt szög $\geq 90°$, akkor X független.

Definíció. Az $E \setminus (\bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha)$ összefüggőségi komponenseit Weyl-kamráknak hívjuk.

Állítás Legyen $\mathcal{C}$ a Weyl-kamrák halmaza.

- $|\mathcal{C}|$ megegyezik a Φ különböző fundamentális rendszereinek számával.
- Sőt, a Weyl-csoport hatása a Weyl-kamrákon ekvivalens a Φ különböző fundamentális rendszerein vett hatásával, azaz $\exists\, \varphi : \mathcal{C} \to \{\Pi \subset \Phi \,|\, \Pi \text{ bázisa } \Phi\text{-nek}\}$ bijekció, melyre

$$\varphi(g(C)) = g(\varphi(C)) \text{ minden } C \in \mathcal{C},\ g \in W\text{-re.}$$

A Weyl-csoport hatása

A Weyl-csoport hatása Φ-n

Emlékeztető. $W = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ a Φ gyökrendszer Weyl-csoportja.

Legyen $\Phi \subset E$ gyökrendszer, és $\Pi \subset \Phi^+ \subset \Phi$ fundamentális gyökrendszer, illetve az általa definiált pozitív gyökök rendszere.

Állítás. Ha $\alpha \in \Pi$, akkor w_α az α-t $-\alpha \in \Phi^-$-ba képzi, de $w_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ minden $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$-ra. Vagyis w_α az α-tól különböző pozitív gyököket egymás között permutálja.

Bizonyítás.

- Nyilvánvaló, hogy $w_\alpha(\alpha) = -\alpha \in \Phi^-$, és hogy $w_\alpha(\beta) \neq \alpha$, ha $\beta \in \Phi^+$.
- Legyen $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Ekkor $\beta = \sum_{\delta \in \Pi} k_\delta \delta$, ahol minden $\delta \in \Pi$-ra $k_\delta \geq 0$ és $k_\delta > 0$ valamely $\delta \neq \alpha$-ra.
- Így $w_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$-ban a $\delta \in \Pi$ együtthatója továbbra is $k_\delta > 0$. Tehát $w_\alpha(\beta) \in \Phi^+$. $\square$

Definíció. Egy $\beta \in \Phi$ (Π-re nézve vett) **magasságát** a $h(\beta) = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha$ módon definiáljuk, ahol $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$.

Megjegyzés. $h(\beta) > 0 \iff \beta \in \Phi^+$ és $h(\beta) = 1 \iff \beta \in \Pi$.

Tétel.

1. Minden $\beta \in \Phi$ gyök előáll $\beta = g(\alpha)$ alakban valamely $g \in W$-re és $\alpha \in \Pi$-re.
2. $W = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi \rangle$, azaz már a **fundamentális tükrözések** is generálják a Weyl-csoportot.

Bizonyítás. Jelölje $W_0 = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi \rangle \leq W$ a fundamentális tükrözések által generált részcsoportot.

1. Belátjuk, hogy minden $\beta \in \Phi$ gyök előáll $\beta = g(\alpha)$ alakban valamely $g \in W_0$-ra és $\alpha \in \Pi$-re.
   - Az állítás nyilvánvaló, ha $\beta \in \Pi$.
   - Legyen most $\beta = \sum_{\delta \in \Pi} k_\delta \delta \in \Phi^+$, $\beta \notin \Pi$. Így $h(\beta) > 1$ és $k_\delta, k'_\delta > 0$ valamely $\delta \neq \delta'$-re.

- Állítjuk, hogy $(\beta, \delta) > 0$ valamely $\delta \in \Pi$-re. Feltéve az ellenkezőjét

$$0 < (\beta, \beta) = \Big(\beta, \sum_{\delta \in \Pi} k_\delta \delta\Big) = \sum_{\delta \in \Pi} \underbrace{k_\delta}_{\geq 0} \underbrace{(\beta, \delta)}_{\leq 0} \leq 0$$

- Legyen $\delta \in \Pi$ olyan, melyre $(\beta, \delta) > 0$. Ekkor $w_\delta(\beta) = \beta - \langle \beta, \delta \rangle \delta \in \Phi^+$-ra $h(w_\delta(\beta)) = h(\beta) - \langle \beta, \delta \rangle < h(\beta)$.
- $h(\beta)$ szerinti indukcióval adódik, hogy $w_\delta(\beta) = g'(\alpha)$ valamely $g' \in W_0$-ra és $\alpha \in \Pi$-re, így $\beta = \underbrace{(w_\delta g')}_{\in W_0}(\alpha)$.
- Végül, ha $\beta \in \Phi^-$, akkor az eddigiek alapján $-\beta = g'(\alpha) \in \Phi^+$ (ahol $g' \in W_0$ és $\alpha \in \Pi$), így $\beta = \underbrace{(g' w_\alpha)}_{\in W_0}(\alpha)$.

2. Belátjuk, hogy $W_0 = W$.
   - Mivel $W = \langle w_\beta \mid \beta \in \Phi \rangle$, elég belátni, hogy $w_\beta \in W_0$ minden $\beta \in \Phi$-re.
   - Legyen $\beta \in \Phi$. Az előző pont szerint $\beta = g(\alpha)$ valamely $g \in W_0$, $\alpha \in \Pi$-re. Következésképpen $w_\beta = g w_\alpha g^{-1} \in W_0$. $\square$

A hossz függvény

Továbbra is legyen $\Pi \subset \Phi^+ \subset \Phi$ rögzített.

Definíció. Legyen $g \in W$ a Weyl-csoport egy eleme, így g előáll $\{w_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$-beli elemek szorzataként.

- A g hossza $\ell(g) = t$, ha t a legkisebb olyan pozitív egész, melyre g előáll $g = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \dots w_{\alpha_t}$ alakban, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Pi$.
- A $g = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \dots w_{\alpha_t}$ (ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Pi$) felírás redukált, ha $t = \ell(g)$.

Nyilvánvaló, hogy $\ell(1) = 0$ és $\ell(g) = 1 \iff g = w_\alpha$ valamely $\alpha \in \Pi$-re.

A hossz függvény másképp is jellemezhető.

Definíció. Egy $g \in W$-re legyen $n(g) := |\Phi^+ \cap g^{-1}(\Phi^-)|$. Azaz $n(g)$ azon pozitív gyökök száma, melyeket g negatív gyökbe képez.

- Nyilvánvaló, hogy $g = 1$ esetén $\ell(1) = 0$ és $n(1) = 0$.
- Korábban azt is láttuk, hogy $g = w_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ esetén $w_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, így $n(w_\alpha) = 1 = \ell(w_\alpha)$.

Tétel. $\ell(g) = n(g)$ minden $g \in W$-re.

Ehhez először belátunk egy segédállítást.

Lemma. Legyen $g = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_t}$ redukált felírása $g \in W$-nek, azaz $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Pi$ és $\ell(g) = t$. Ekkor $g(\alpha_t) \in \Phi^-$.

Bizonyítás.

- Tegyük fel, hogy

$$g(\alpha_t) = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_t}(\alpha_t) = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_{t-1}}(-\alpha_t) \in \Phi^+,$$

  azaz $w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \in \Phi^-$.
- Legyen $\beta_i = w_{\alpha_{i+1}} \cdots w_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \in \Phi$ minden $0 \leq i \leq t-1$-re. Ekkor $\beta_{t-1} = \alpha_t \in \Phi^+$ és $\beta_0 \in \Phi^-$.

- Legyen s a legnagyobb olyan, amire $\beta_s \in \Phi^+$. Így $\beta_{s-1} = w_{\alpha_s}(\beta_s) \in \Phi^-$, amiből $\beta_s = \alpha_s$ következik.
- Tehát $w' = w_{\alpha_{s+1}} \cdots w_{\alpha_{t-1}} \in W$-re $w'(\alpha_t) = \alpha_s$.
- Felhasználva, hogy $w' w_{\alpha_t} (w')^{-1} = w_{w'(\alpha_t)} = w_{\alpha_s}$, adódik,hogy

$$w_{\alpha_s} w' = w' w_{\alpha_t} \quad \text{azaz} \quad w_{\alpha_s} w_{\alpha_{s+1}} \cdots w_{\alpha_{t-1}} = w_{\alpha_{s+1}} \cdots w_{\alpha_{t-1}} w_{\alpha_t}.$$

- Használjuk ezt a relációt a $g = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_t}$ felírás rövidítésére:

$$\begin{aligned} g &= w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_{s-1}} (w_{\alpha_s} \cdots w_{\alpha_{t-1}}) w_{\alpha_t} \\ &= w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_{s-1}} (w_{\alpha_{s+1}} \cdots w_{\alpha_{t-1}} w_{\alpha_t}) w_{\alpha_t} \\ &= w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_{s-1}} w_{\alpha_{s+1}} \cdots w_{\alpha_{t-1}}, \end{aligned}$$

ami ellentmond annak, hogy $\ell(g) = t$. □

Tétel $\ell(g) = n(g)$ minden $g \in W$-re.

Bizonyítás.

- $\ell(g)$ szerinti teljesi ndukciót alkalmazunk, az állítás világos $\ell(g) = 0$ vagy $\ell(g) = 1$ esetén.
- Legyen $g = w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_t} \in W$ redukált, és $\alpha = \alpha_t$. A lemma alapján $g(\alpha) \in \Phi^-$.
- Nyilvánvaló, hogy $\ell(gw_\alpha) = \ell(w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \cdots w_{\alpha_{t-1}}) = t - 1$, így $\ell(gw_\alpha) = \ell(g) - 1$.
- Ha $\beta \in \Phi^+$, $\beta \neq \alpha$, akkor $w_\alpha(\beta) \in \Phi^+$, így g és gw_α a $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ ugyanannyi elemét viszi Φ^--ba. Továbbá $gw_\alpha(\alpha) \in \Phi^+$, így $n(gw_\alpha) = n(g) - 1$.
- Indukció szerint $\ell(gw_\alpha) = n(gw_\alpha)$, így $\ell(g) = n(g)$. $\square$

W hatása a fundamentális rendszereken

Tétel. W regulárisan permutálja a Φ-beli különböző fundamentális rendszereket.

- Legyenek $\Pi_1, \ \Pi_2 \subset \Phi$ fundamentális rendszerek Φ-ben, és $\Phi_1^+, \ \Phi_2^+$ az általuk definiált pozitív gyökök rendszere.
  A tranzitivitáshoz be kell látnunk, hogy $\Pi_2 = g(\Pi_1)$ alkalmas $g \in W$-re.
  - Legyen $t = |\Phi_1^+ \cap \Phi_2^-|$. Ha $t = 0$, akkor $\Phi_1^+ = \Phi_2^+ \iff \Pi_1 = \Pi_2$, így $g = 1$ megfelelő.
  - Legyen $t > 0$. Ekkor $\Pi_1 \cap \Phi_2^- \neq \emptyset$.
  - Legyen $\alpha \in \Pi_1 \cap \Phi_2^-$. Ekkor $w_\alpha(\Phi_1^+) = \Phi_1^+ \cup \{-\alpha\} \setminus \{\alpha\}$, így $|w_\alpha(\Phi_1^+) \cap \Phi_2^-| = t - 1$.
  - $w_\alpha(\Phi_1^+)$ a $w_\alpha(\Pi_1)$ fundamentális rendszer által meghatározott pozitív gyökök rendszere, így t szerinti indukciót alkalmazva adódik, hogy $\Pi_2 = g'(w_\alpha(\Pi_1))$ alkalmas $g' \in W$-re.
  - Tehát $\Pi_2 = g(\Pi_1)$ ahol $g = g'w_\alpha \in W$.

- Végül, ha $g(\Pi) = \Pi$ valamely Π fundamentális rendszerre és $g \in W$-re, akkor $g(\Phi^+) = \Phi^+$, tehát $\ell(g) = n(g) = |\Phi^+ \cap g^{-1}(\Phi^-)| = 0$, azaz $g = 1$. $\square$

Következmény.

- W regulárisan permutálja a Weyl-kamrákat.
- A Φ-beli fundamentális rendszerek, illetve Weyl-kamrák száma megegyezik a Weyl-csoport elemszámával.

Gyökrendszerek klasszifikációja

Gyökrendszer Cartan-mátrixa

Legyen $\Phi \subset E$ gyökrendszer, és $\Pi \subset \Phi$ a fundamentális gyökök egy rendszere, $|\Pi| = \dim E = \ell$.

Definíció. Legyenek Π elemei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$. A Φ Cartan mátrixa $\big(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle\big) \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$.

Megjegyzések.

- Mivel W tranzitívan permutálja a fundamentális rendszereket, a Cartan mátrix nem függ Π megválasztásától, csupán Π elemeinek sorrendjétől.
- A Cartan mátrix nem-elfajuló.

Definíció. A $\Phi \subset E$ és $\Phi' \subset E'$ izomorf gyökrendszerek, ha létezik egy $\varphi : E \to E'$ vektortér-izomorfizmus, melyre $\varphi(\Phi) = \Phi'$ és $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ minden $\alpha, \beta \in \Phi$-re.

Tétel. A Cartan mátrix egyértelműen (izomorfia erejéig) meghatározza Φ-t.

Pontosabban: Legyenek $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \Phi \subset E$ és $\Pi' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell\} \subset \Phi' \subset E'$. Tegyük fel, hogy $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ minden $1 \leq i, j \leq \ell$-re. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E')$ a $\varphi : \alpha_i \to \alpha'_i$ $(1 \leq i \leq \ell)$ kiterjesztése. Ekkor $\varphi : \Phi \to \Phi'$ bijekció, továbbá $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ minden $\alpha, \beta \in \Phi$-re.

Bizonyítás.

- Mivel $\Pi \subset E$ és $\Pi' \subset E'$ bázisok, egyértelműen létezik a $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E')$ a $\varphi : \alpha_i \to \alpha'_i$ $(1 \leq i \leq \ell)$ lineáris kiterjesztés.
- Legyenek $\alpha, \beta \in \Pi$, $\alpha' = \varphi(\alpha), \beta' = \varphi(\beta)$. Ekkor

$$\begin{aligned} w_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) &= w_{\alpha'}(\beta') = \beta' - \langle \beta', \alpha' \rangle \alpha' = \varphi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi(\alpha) \\ &= \varphi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \varphi(w_\alpha(\beta)). \end{aligned}$$

- Mivel $\langle \Pi \rangle = E$ és $\langle \Pi' \rangle = \langle \varphi(\beta) \,|\, \beta \in \Pi \rangle = E'$, a linearitásból adódik, hogy $\varphi w_\alpha = w_{\varphi(\alpha)} \varphi$, vagyis a következő diagram kommutatív.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "w_\alpha"'] & E' \arrow[d, "w_{\varphi(\alpha)}"] \\
E \arrow[r, "\varphi"'] & E'
\end{tikzcd}
$$

  Így $\varphi w_\alpha \varphi^{-1} = w_{\varphi(\alpha)}$ minden $\alpha \in \Pi$-re.
- Legyenek W illetve W' a Φ illetve Φ' Weyl-csoportja. Mivel $W = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi \rangle$ és $W' = \langle w_{\alpha'} \,|\, \alpha' \in \Pi' \rangle = \langle w_{\varphi(\alpha)} \,|\, \alpha \in \Pi \rangle$, az előző pont alapján a $g \to \varphi g \varphi^{-1}$ megad egy $W \to W'$ izomorfizmust.

- Ha $\beta \in \Phi$, akkor $\beta = g(\alpha)$ valamely $\alpha \in \Pi$, $g \in W$-re, így $\varphi(\beta) = \underbrace{\varphi g \varphi^{-1}}_{\in W'} \underbrace{\varphi(\alpha)}_{\in \Pi'} \in \Phi'$.
  Tehát $\varphi : \Phi \to \Phi'$ injektív. Az érvelésben φ-t kicserélve φ^{-1}-re kapjuk, hogy $\varphi : \Phi \to \Phi'$ bijekció.
- Feladat. Igazoljuk, hogy $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \Phi$-re is teljesül. $\square$