A következő feladatokban L mindig egy $\mathbb{C}$ feletti véges dimenziós algebra.

50. Legyen $L = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, H az L-beli diagonális mátrixok Cartan részalgebrája, és Φ a hozzá tartozó gyökrendszer. Igazoljuk, hogy bármely $\alpha, \beta \in \Phi$-re $\frac{2(h_\beta, h_\alpha)}{(h_\alpha, h_\alpha)} \in \{-1, 0, 1\}$.
51. Legyen L féligegyszerű, H egy Cartan részalgebrája L-nek, és $h \in H$. Igazoljuk, hogy $C_L(h)$ reduktív. Mutassuk meg, hogy mindig van olyan $h \in H$, melyre $C_L(h) = H$.
52. Legyen L féligegyszerű. Válasszunk egy $h \in L$ féligegyszerű elemet, és tegyük fel, hogy hogy $L_0 = C_L(h)$ feloldható. Igazoljuk, hogy L_0 kommutatív.
53. Bizonyítsuk be, hogy nincs 4, 5, illetve 7 dimenziós féligegyszerű Lie-algebra.

A következő feladatokban $\Phi \subset E$ gyökrendszer. (Nem tesszük fel, hogy Lie algebrából kaptuk!)

54. Keressünk α, β gyököket $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$-ben, melyre $2(h_\beta, h_\alpha)/(h_\alpha, h_\alpha) = 2$.
55. Igazoljuk, hogy (hasonlóságtól, és attól eltekintve, hogy $A_1 \times A_1$-ben a két egymásra merőleges gyök hosszának aránya tetszőleges lehet), minden két dimenziós gyökrendszer $A_1 \times A_1, A_2, B_2$ és G_2 valamelyikével egyezik meg.
56. Határozzuk meg a két dimenziós gyökrendszerek Weyl csoportját.
57. Igazoljuk, hogy a Φ-n belül azonos hosszúságú gyökök szintén gyökrendszert alkotnak.
58. Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \pm\beta$ és $\beta - p\alpha, \beta + q\alpha \in \Phi$ valamely $0 \leq p, q \in \mathbb{Z}$-re. Igazoljuk, hogy $\beta + k\alpha \in \Phi$ minden $-p \leq k \leq q$-ra.
59. Legyenek $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \pm\beta$. Legyen $\beta - p\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ a β-n keresztülmenő α-lánc, azaz p, q a legnagyobb olyan egészek, hogy $\beta - p\alpha, \beta + q\alpha \in \Phi$. Igazoljuk, hogy $\langle \beta, \alpha \rangle = p - q$.
60. Legyenek $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \pm\beta$. Legyen továbbá $\beta - p\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ az α-lánc β-n keresztül, valamint $\alpha - p'\beta, \ldots, \alpha + q'\beta$ a β-lánc α-n keresztül. Igazoljuk, hogy $q(p+1)(\alpha, \alpha) = q'(p'+1)(\beta, \beta)$.
61. Legyen $g \in GL(E)$ olyan transzformáció, melyre $g(\Phi) = \Phi$. Igazoljuk, hogy $g w_\alpha g^{-1} = w_{g(\alpha)}$ minden $\alpha \in \Phi$-re és $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle g(\beta), g(\alpha) \rangle$ minden $\alpha, \beta \in \Phi$-re.
62. Tegyük fel, hogy a gyökrendszer definíciójából kihagyjuk (2)-t. (azaz $\alpha, c\alpha \in \Phi \not\Rightarrow c = \pm 1$) Igazoljuk, hogy ha $\alpha, c\alpha \in \Phi$, akkor $c \in \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2\}$.