Lie Algebrák, 8. Előadás
2024. április 18.

18. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ hatása L-en

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ **hatása** L**-en**

- Tetszőleges $\alpha \in \Phi$-re és $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$-ra legyen $S_\alpha := \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a korábbi állítás szerint.
- Valamely $\alpha \in \Phi$-re válasszunk egy $S_\alpha := \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ részalgebrát, ekkor az S_α-nak az adjungált reprezentáció szerinti hatása egy $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulus struktúrát definiál L-en.
- Alkalmazva erre az $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ reprezentációiról tanultakat, újabb ismereteket szerezhetünk L Cartan-felbontásáról, illetve a gyökök kapcsolatáról.

Állítás.

- Minden $\alpha \in \Phi$-re $\dim(L_\alpha) = 1$.
- Ha $\alpha, c\alpha \in \Phi$ valamely $c \in \mathbb{C}^\times$-re, akkor $c = \pm 1$.

Bizonyítás.

- Legyen $M := H \oplus (\oplus_{c\in\mathbb{C}} L_{c\alpha})$. Ekkor M egy S_α-invariáns altér.
- Használjuk az $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ reprezentációelméletét. Eszerint

$$M \simeq \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} a_m \cdot V^{(m)},$$

  ahol $V^{(m)}$ az egyetlen $m+1$ dimenziós irreducibilis $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulus, és minden m-re $a_m \in \mathbb{N}$ a $V^{(m)}$ multiplicitása a felbontásban.
- Az $(\operatorname{ad} h_\alpha)_{|V^{(m)}}$ diagonális alakja $\operatorname{diag}(-m, -m+2, \ldots, m)$, így $L_{c\alpha} \neq 0$ esetén $2c = c\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.
- Mivel $\ker(\operatorname{ad}_M h_\alpha) = H$, az M felbontásából $\sum_{2|m} a_m = \dim(H)$
- Ha $h \in \ker(\alpha) = \{h \in H \mid \alpha(h) = 0\}$, akkor minden $x \in L_{c\alpha}$-ra $[hx] = c\alpha(h)x = 0$, és $[hH] = 0$, így $[hM] = 0$. Tehát $\ker(\alpha)$ egy S_α-invariáns altér, melyen S_α triviálisan hat.
  Így $a_0 = \dim(H) - 1$.
- $S_\alpha \leq M$ egy $\operatorname{ad}(S_\alpha)$-invariáns altér, és $S_\alpha \simeq V^{(2)}$-vel. Tehát $a_2 \geq 1$.
- Az előző három pontból $a_0 = \dim(H) - 1$, $a_2 = 1$ és $a_m = 0$ minden $m \geq 4$ páros m-re. Speciálisan, $c\alpha$ nem gyök, ha $c \geq 2$ páros.
- Az előző pont szerint, ha $\alpha \in \Phi$, akkor $2\alpha \notin \Phi$. Így, ha $\alpha \in \Phi$, akkor $\frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$.
- Mivel páratlan m esetén $\operatorname{ad}(h_\alpha)$-nak egy $V^{(m)} \leq M$-ra vett megszorításának az $1 = \frac{1}{2}\alpha(h_\alpha)$ sajátértéke, adódik, hogy $a_m = 0$ minden páratlan m-re.
- Így $M = \ker(\alpha) \oplus S_\alpha = H \oplus \langle x_\alpha \rangle \oplus \langle y_\alpha \rangle$, vagyis $\dim(L_\alpha) = 1$ és $L_{c\alpha} = 0$, ha $c \notin \{\pm 1, 0\}$. $\square$

Következmény. Minden $\alpha \in \Phi$-re S_α egyértelmű, és $S_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + [L_\alpha L_{-\alpha}]$.

Állítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$.

- Ha p, q a két legnagyobb pozitív egész, melyekre $\beta - p\alpha \in \Phi$ és $\beta + q\alpha \in \Phi$, akkor $\beta + k\alpha \in \Phi$ minden $-p \leq k \leq q$-ra, továbbá $\beta(h_\alpha) = \frac{2(t_\beta, t_\alpha)}{(t_\alpha, t_\alpha)} = p - q$.
- Ha $\alpha + \beta \in \Phi$, akkor $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Bizonyítás.

- Legyen $K = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} L_{\beta + k\alpha}$. Ekkor K invariáns S_α hatására. A feltétel miatt $\beta + k\alpha \neq 0$ egyetlen k-ra sem.
- Az $(\operatorname{ad} h_\alpha)_{|K}$ diagonális alakjában a $(\beta + k\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2k$ sajátértékek állnak, és mindegyik sajátérték egyszeres.
- Az $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ reprezentációelméletét használva adódik, hogy $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$, továbbá K irreducibilis S_α-modulus.
- Ha $K \simeq V^{(m)}$, akkor $\beta(h_\alpha) + 2q = m$ és $\beta(h_\alpha) - 2p = -m$, így $2\beta(h_\alpha) + 2q - 2p = 0$, azaz $\beta(h_\alpha) = p - q$.
- Mivel $\operatorname{ad}_K(h_\alpha)$ sajátértékei $-m, -m+2, \ldots, m-2, m$, adódik, hogy minden $-p \leq k \leq q$-ra $(\beta + k\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2k$ sajátértéke $\operatorname{ad}_K(h_\alpha)$-nak, azaz $\beta + k\alpha \in \Phi$. Végül

  $$\beta(h_\alpha) = (t_\beta, h_\alpha) = \frac{2(t_\beta, t_\alpha)}{(t_\alpha, t_\alpha)}$$

  Így az első állítást beláttuk.
- A második állítás abból adódik, hogy ha $\alpha + \beta$ is gyök, és $L_\beta = \langle v \rangle$, akkor az $\mathfrak{sl}(\mathbb{C})$ reprezentációinak vizsgálatánál láthattuk, hogy $L_{\alpha+\beta} = \langle x_\alpha(v) \rangle$. $\square$

Következmény. Bármely $\alpha, \beta \in \Phi$-re $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.

Bizonyítás.

- Ha $\beta = \pm\alpha$, akkor $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \mp\alpha \in \Phi$.
- Ellenkező esetben az előző állítás jelöléseivel $\beta(h_\alpha) = p - q$, így $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta + k\alpha \in \Phi$, mivel $-p \leq k = q - p \leq q$. $\square$

19. A gyökök által generált euklideszi tér

A gyökök által generált euklideszi tér

Definíció. (Bilineáris forma H^*-on) Tetszőleges $\gamma, \delta \in H^*$-ra legyen $(\gamma, \delta) := (t_\gamma, t_\delta)$. (Ahol a második zárójel az L Killing formája H-n.) Ez egy szimmetrikus és nem elfajuló bilineáris forma H^*-on, és $(\gamma, \delta) = \gamma(t_\delta) = \delta(t_\gamma)$ minden $\gamma, \delta \in H^*$-ra.

Állítás. Legyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \subset \Phi$ bázisa H^*-nak. Ekkor tetszőleges $\beta \in \Phi$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ racionális együtthatós lineáris kombinációja.

Bizonyítás.

- Legyen $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i$, ahol $c_i \in \mathbb{C}$.
- Legyen $M = (\alpha_i(h_{\alpha_j})) \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$. Mivel $\alpha_i(h_{\alpha_j}) = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ minden i, j-re, $\det(M) \neq 0$ a H^*-on vett bilineáris forma nem-elfajultsága miatt.

- A $\beta = \sum_i c_i \alpha_i$-ből kapjuk, hogy

$$\beta(t_{\alpha_j}) = \frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} c_i \quad \text{minden } 1 \le j \le \ell\text{-re.}$$

- Ezen lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa $M^T \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$, és a bal oldalon is egész számok állnak, így minden $c_i \in \mathbb{Q}$. $\square$

Következmény. Legyen $E_{\mathbb{Q}} = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Q}}$ illetve $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}} = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$. Ekkor $\dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{R}} E = \ell = \dim H^*$.

Állítás. A bilineáris formát $E_{\mathbb{Q}}$-ra megszorítva az racionális értékű és pozitív definit.

Bizonyítás.

- A Cartan felbontás alapján tudjuk, hogy tetszőleges $\gamma, \delta \in H^*$-ra

$$(\gamma, \delta) = (t_\gamma, t_\delta) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\gamma)\alpha(t_\delta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \gamma)(\alpha, \delta).$$

- Speciálisan, minden $\beta \in \Phi$-re (sőt, ez igaz minden $\beta \in H^*$-ra)

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2.$$

- Szorozva ezt az egyenletet $\frac{4}{(\beta,\beta)^2}$-tel:

$$\frac{4}{(\beta, \beta)} \sum_{\alpha \in \Phi} \left(\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \right)^2 = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha(t_\beta))^2 \in \mathbb{Z}.$$

- A bilinearitást felhasználva adódik, hogy a bilineáris függvény racionális értékű $E_{\mathbb{Q}} = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Q}}$-n és valós értékű $E = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$-en.
- Végezetül, tetszőleges $0 \neq \gamma \in E$-re

$$(\gamma, \gamma) = \sum_{\alpha \in \Phi} \underbrace{(\alpha, \gamma)}_{\in \mathbb{R}}^2 > 0. \quad \square$$

Összefoglalás. Az eddigi jelölésekkel

- E valós euklideszi tér és $\dim E = \dim_{\mathbb{C}} H$.
- $\Phi \subset E$, generálja E-t és ha $\alpha \in \Phi$, akkor $c\alpha \in \Phi \iff c = \pm 1$.
- Ha $\alpha, \beta \in \Phi$, akkor $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \alpha \in \Phi$.
- Ha $\alpha, \beta \in \Phi$, akkor $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Definíció. Egy, a fenti tulajdonságokat teljesítő $\Phi \subset E$ véges halmazt egy (E-beli) *gyökrendszer*nek nevezünk.

Következő célunk a gyökrendszerek leírása lesz.

20. Gyökrendszerek

Gyökrendszerek

- Legyen E egy véges dimenziós valós euklideszi tér.
- Egy $0 \neq \alpha \in E$-re jelölje $w_\alpha \in GL(E)$ a $P_\alpha = \alpha^\perp$ hipersíkra tükrözést, azaz tetszőleges $\beta \in E$-re $w_\alpha(\beta) = \beta$, ha $\beta \perp \alpha$ és $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$.
- Könnyen ellenőrizhetően
$$w_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$
minden $\beta \in E$-re.

Jelölés. A továbbiakban legyen $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ minden $\alpha, \beta \in E$-re. (Az első változójában lineáris)

Definíció. Az E euklideszi tér egy $\Phi \subset E$ részhalmazát *gyökrendszernek* hívjuk, ha a következők teljesülnek.

1. Φ véges halmaz, $0 \notin \Phi$ és $\langle \Phi \rangle = E$;
2. Ha $\alpha \in \Phi$, akkor $\pm\alpha$ az α összes skalárszorosa;
3. Ha $\alpha \in \Phi$, akkor a w_α tükrözés Φ-t saját magába viszi;
4. $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ minden $\alpha, \beta \in \Phi$-re.

A Weyl csoport

Definíció. Legyen $\Phi \subset E$ gyökrendszer. A Φ *Weyl csoportja*:
$$W = W(\Phi) := \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi \rangle \leq GL(E).$$

Állítás. W véges csoport.

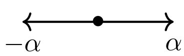
Bizonyítás.

- A definícióból adódóan, $w(\Phi) = \Phi$ minden $w \in W$-re, azaz W hat a Φ véges halmazon.
- Mivel $\langle \Phi \rangle = E$, ez a hatás hű, így $|W| \leq |\Phi|!$. □

Példa.

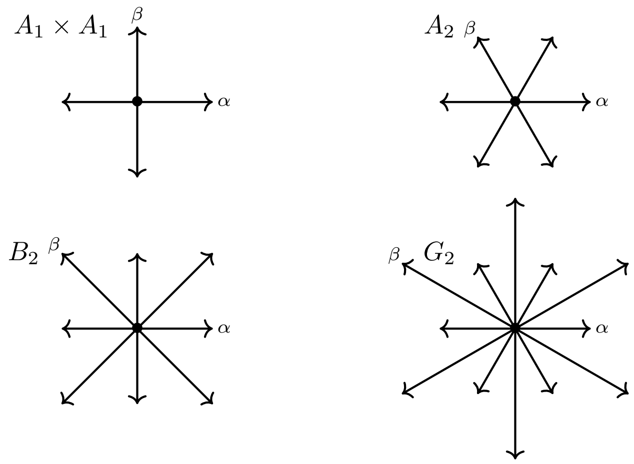
- Legyen $E = \left\{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \sum_i a_i = 0\right\} \leq \mathbb{R}^{n+1}$ egy n dimenziós euklideszi tér, ahol a skalárszorzatot az $\mathbb{R}^{n+1}$-en vett természetes skalárszorzás megszorításával nyerjük.
- Minden $1 \leq i \neq j \leq n+1$-re legyen $\alpha_{ij} = e_i - e_j = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0, \underset{(j)}{-1}, 0, \ldots, 0)$, és $\Phi = \{\alpha_{ij} \,|\, i \neq j\} \subset E$, így $|\Phi| = n(n+1)$.
- Egy $\alpha_{ij} \in \Phi$ esetén $P_{\alpha_{ij}} = \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \,|\, a_i = a_j\}$ és $w_{\alpha_{ij}}$ az i. és a j. koordináta felcserélését eredményezi, így $w_{\alpha_{ij}}(\Phi) = \Phi$.
- $\langle \alpha_{ij}, \alpha_{kl} \rangle$ értéke $-2, -1, 0, 1, 2$ lehet.
- Tehát Φ gyökrendszer E-ben.
- Végül $W = \langle w_{\alpha_{ij}} \,|\, \alpha_{ij} \in \Phi \rangle \simeq S_{n+1}$.

Példa: Egy és kétdimenziós gyökrendszerek

- $\dim E = 1$: 

A_1

- $\dim E = 2$:



Állítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \Phi$, ahol $(\alpha, \beta) \leq 0$, $\alpha \neq -\beta$, $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ és a közbezárt szögük ϕ. Ekkor a következő esetek lehetségesek.

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	ϕ	$\|\beta\|/\|\alpha\|$
0	0	90°	nem megh.
-1	-1	120°	1
-1	-2	135°	$\sqrt{2}$
-1	-3	150°	$\sqrt{3}$

1. táblázat. Gyökpárok közötti kapcsolat

Bizonyítás.

- Tudjuk, hogy
$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \frac{2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos(\phi)}{\|\beta\|^2} = 2\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos(\phi) \in \mathbb{Z}$$
és hasonlóan $\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos(\phi) \in \mathbb{Z}$.
- Így a szorzatukra $\langle \alpha, \beta \rangle \cdot \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2(\phi) \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- A feltételeket figyelembe véve könnyen adódik az állítás. □

Következmény. Az összes kétdimenziós gyökrendszer: $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2$. (gyakorlat)

Állítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$.

- Ha $(\alpha, \beta) > 0$, akkor $\alpha - \beta$ gyök; Ha $(\alpha, \beta) < 0$, akkor $\alpha + \beta$ gyök;
- Legyenek p, q a két legnagyobb egészek, hogy $\beta - p\alpha \in \Phi$ és $\beta + q\alpha \in \Phi$. Ekkor $\beta + k\alpha \in \Phi$ minden $-p \leq k \leq q$-ra.

Bizonyítás.

- Ha $(\alpha, \beta) > 0$, akkor $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, vagy $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, így $w_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta \in \Phi$ és $w_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi$ közül az egyik $\alpha - \beta$ vagy $\beta - \alpha$. Mivel $\Phi = -\Phi$, következik, hogy $\alpha - \beta \in \Phi$.

  β helyére $-\beta$-t írva, az 1. állítás másik fele is adódik.
- A 2. állítás gyakorlati feladat.

Definíció. Az előző állításban szereplő $\{\beta + k\alpha \mid -p \leq k \leq q\}$ gyöksorozatot *a β-n keresztülmenő α-láncnak* hívjuk.