38. Mutassuk meg, hogy a

$$h \to \begin{pmatrix} m & & & \\ & m-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{pmatrix}, \qquad x \to \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad y \to \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}$$

hozzárendelés tényleg $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ reprezentációját valósítja meg, és hogy az így definiált reprezentáció tényleg irreducibilis.

39. Minden $m \in \mathbb{N}$-re jelölje $V(m)$ az $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ $m+1$-dimenziós irreducibilis reprezentációját. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$-re adjuk meg $V(m) \otimes V(n)$ irreducibilis $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulusokra való felbontását.

40. Tekintsük $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-t, mint $L = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ azon részalgebráját, melynek elemei

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Az ad_L adjungált leképezés definiál egy $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(L)$ reprezentációt. Adjuk meg ezen reprezentáció felbontását irreducibilis komponenseinek összegére.

41. Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{C}$ felett, és $X \subset \mathrm{End}(V)$ egymással páronként felcserélhető, lineáris transzformációk egy részhalmaza. Igazoljuk, hogy V-nek van olyan bázisa, melyben X összes elemének a mátrixa egyszerre diagonális alakú.

42. Az L Lie algebrát reduktívnak hívjuk, ha $\mathrm{Rad}(L) = Z(L)$. Igazoljuk, hogy ha L reduktív, akkor $L = Z(L) \oplus [LL]$, ahol $[LL]$ féligegyszerű.

43. Tegyük fel, hogy L reduktív Lie-algebra, és $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ olyan reprezentáció, melyre $\phi(z) \in \mathfrak{gl}(V)$ féligegyszerű minden $z \in Z(G)$-re. Igazoljuk, hogy ϕ teljesen reducibilis. Igaz-e az állítás megfordítása?

44. Legyen L egy véges dimenziós algebra. Tegyük fel, hogy L-nek van bijektív derivációja. Mutassuk meg, hogy L nilpotens.

45. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$-ben a diagonális mátrixok egy Cartan részalgebrát alkotnak. Határozzuk meg az ezen Cartan részalgebrához tartozó gyököket és gyöktereket.

46. Legyen $S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_\ell \\ I_\ell & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\ell \times 2\ell}$ és $C_\ell = \mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C} \,|\, SX = -X^T S\}$ a szimplektikus algebra. Határozzuk meg C_ℓ egy Cartan részalgebráját, és a hozzá tartozó Cartan felbontást.

47. Legyen $L = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Mi az (E_{ij}, E_{kl}) Killing-forma értéke tetszőleges $i \neq j, k \neq l$-re?

48. Legyen $L = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, H az L-beli diagonális mátrixok Cartan részalgebrája, és Φ a hozzá tartozó gyökrendszer. Mely $\alpha, \beta \in \Phi$-re lesz $\alpha + \beta$ is gyök?

49. Legyen $L = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, és H az L-beli diagonális mátrixok részalgebrája. Mely $h \in H$-beli elemekre a legkisebb $\mathrm{ad}\, h$ magtere?