Lie Algebrák, 7. Előadás

2024. április 11.

15. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ reprezentációi

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ reprezentációi

- Az $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ véges dimenziós reprezentációinak leírásához tekintsük annak
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
bázisát. Ekkor
$$[h,x] = 2x, \qquad [h,y] = -2y, \qquad [x,y] = h.$$
- Legyen V véges dimenziós $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulus $\overset{Weyl}{\Rightarrow}$ $V = \oplus_i V_i$, ahol minden V_i egyszerű $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulus. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy V irreducibilis.
- $h \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ diagonális $\Rightarrow$ $\phi(h) \in \mathfrak{gl}(V)$ diagonalizálható $\Rightarrow$ $V = \oplus_\lambda V_\lambda$, ahol $V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \lambda v\}$.

Lemma. Ha $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$-re $hv = \lambda v$, akkor
$$h(xv) = (\lambda+2)(xv) \quad \text{és} \quad h(yv) = (\lambda - 2)v.$$

Bizonyítás. $h(xv) = [h,x]v + x(hv) = 2xv + x(\lambda v) = (\lambda+2)xv$. Hasonló számolás működik y-nal is.

Tétel. Minden $k \geq 1$-re (izomorfia erejéig) egyetlen k-dimenziós irreducibilis reprezentációja van $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-nek. Ha V egy k-dimenziós irreducibilis $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulus, és $m = k-1$, akkor V alkalmas bázisában

$$h \to \begin{pmatrix} m & & & \\ & m-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{pmatrix} \qquad x \to \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$y \to \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

- Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan sajátértéke h-nak, melyre $\lambda+2$ már nem sajátértéke h-nak, és legyen $0 \neq v_0 \in V$, $hv_0 = \lambda v_0$.
- Minden $i \geq 1$-re legyen $v_i := \frac{1}{i!} y^i v_0$. A Lemmát ismételten alkalmazva
$$xv_0 = 0, \quad \text{és } hv_i = (\lambda - 2i)v_i,\ yv_i = (i+1)v_{i+1}\ \forall\ i\text{-re}.$$
- Indukcióval belátjuk, hogy $xv_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ minden $i \geq 1$-re. Ez ($xv_0 = 0$-t is figyelembe véve) könnyen adódik $i = 1$-re.

  Feltéve, hogy $xv_{i-1} = (\lambda - i + 2)v_{i-2}$:
$$\begin{aligned} ixv_i &= x(yv_{i-1}) = \overbrace{[x,y]}^{h} v_{i-1} + y(xv_{i-1}) \\ &= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + y((\lambda - i + 2)v_{i-2}) \\ &= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2)v_{i-1} \\ &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1}. \end{aligned}$$

- Legyen m a legnagyobb egész, melyre $v_m \neq 0$. Ekkor $v_0, \dots, v_m$ a h különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok $\Rightarrow$ lineárisan függetlenek.
- $\langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle$ invariáns h, x, y hatására $\Rightarrow$ $\langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle$ részmodulusa V-nek $\Rightarrow$ $V = \langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle$.
- $0 = xv_{m+1} = (\lambda - m)v_m$-ből $\lambda = m$.
- Innét már azonnal adódik, a h, x, y mátrixalakja a $v_0, \dots, v_m$ bázisban.

Feladat Mutassuk meg, hogy a tételbeli hozzárendelés tényleg $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ reprezentációját valósítja meg, és hogy az így definiált reprezentáció tényleg irreducibilis.

Következmény. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ tetszőleges véges dimenziós reprezentációja esetén h minden sajátértéke egész szám, $\dim(V_s) = \dim(V_{-s})$ minden a h minden s sajátértékére, és a reprezentáció $\dim V_0 + \dim V_1$ darab irreducibilis reprezentáció összege.

16. A Cartan-felbontás

Cartan részalgebra

A továbbiakban legyen L egy véges dimenziós féligegyszerű Lie algebra $\mathbb{C}$ felett.

Definíció. L egy részalgebráját ***tórikus***nak nevezzük, ha minden eleme féligegyszerű. L egy maximális tórikus részalgebráját ***Cartan részalgebrá***nak nevezünk.

Megjegyzés. A Cartan részalgebrát szokás úgy is definiálni, mint egy olyan $H \subset L$ nilpotens részalgebra, melyre $N_L(H) = H$. (Be lehet látni, hogy ez a kétféle definíció ekvivalens.)

Állítás. L egy tórikus részalgebrája kommutatív.

Bizonyítás.

- Legyen T tórikus részalgebra, és $x \in T$. Tegyük fel, hogy $[xT] \neq 0$.
- $\operatorname{ad}_T x$ diagonalizálható $\Rightarrow \exists\ 0 \neq y \in T$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, melyre $[xy] = \operatorname{ad}_T x(y) = \lambda y$. Ekkor $\operatorname{ad}_T y(x) = [yx] = -\lambda y \neq 0$, de $(\operatorname{ad}_T y)^2(x) = -\lambda[yy] = 0$.
- Mivel $\operatorname{ad}_T y$ is diagonalizálható, $T = T_0 \oplus T_1$ egy $\operatorname{ad}_T y$-invariáns felbontás, ahol $T_0 = \{t \in T \mid \operatorname{ad}_T y(t) = 0\}$ és T_1 az $\operatorname{ad}_T y$ többi (0-tól különböző) sajátértékeihez tartozó sajátvektorok által generált altér. Speciálisan, $\operatorname{ad}_{T_1} y$ injektív T_1-en.
- Mivel $\operatorname{ad}_T y(x) \neq 0$, ezért $x = x_0 + x_1$, ahol $x_0 \in T_0$, $0 \neq x_1 \in T_1$. De akkor $0 = (\operatorname{ad}_T y)^2(x) = [y[yx]] = [y[yx_1]] = (\operatorname{ad}_{T_1} y)^2(x_1) \neq 0$. □

A Cartan-felbontás

Tétel. (NB) Ha H_1, H_2 két Cartan-részalgebrája L-nek, akkor van egy olyan $\varphi : L \to L$ Lie-algebra automorfizmus, melyre $\varphi(H_1) = H_2$.

- Mostantól legyen H egy rögzített Cartan részalgebrája L-nek.
- Ekkor H kommutatív, és van olyan bázisa L-nek, melyben $\operatorname{ad} H = \{\operatorname{ad} h \mid h \in H\}$ elemei egyszerre diagonálisak.
- Tetszőleges $\alpha \in H^* = \operatorname{Hom}(H, \mathbb{C})$-re legyen $L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x\ \forall\, h \in H\}$.
- Az egyszerre diagonalizálhatóságból adódóan $L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$. (Itt persze csak véges sok $L_\alpha \neq 0$.)
- Legyen $\Phi = \{\alpha \in H^* \mid \alpha \neq 0,\ L_\alpha \neq 0\}$. A Φ elemeit az L (H-ra nézve vett) ***gyök***einek hívjuk.
- Mivel H kommutatív, $H \leq L_0 = C_L(H)$. (Később látni fogjuk, hogy valójában $H = L_0$ teljesül.)

Állítás.

- $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$-ra $[L^\alpha L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$. (Biz. $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, $h \in H$-ra $\operatorname{ad} h([xy]) = [h[xy]] = [[hx]y] + [x[hy]] = [\alpha(h)x, y] + [x, \beta(h)y] = (\underbrace{\alpha(h) + \beta(h)}_{(\alpha+\beta)(h)})[xy]$.)
- $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$ esetén $\operatorname{ad} x$ nilpotens: (Biz. $(\operatorname{ad} x)^k(L_\beta) \subset L_{\beta+k\alpha} = 0$, ha k elég nagy.)
- Legyenek $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$, melyekre $\alpha + \beta \neq 0$. Ekkor $L_\alpha \perp L_\beta$ a Killing-formára nézve, azaz $\kappa(x, y) = 0$ minden $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$-ra. (Biz. Legyen $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, és $h \in H$, melyre $\alpha(h) \neq -\beta(h)$. Ekkor $\kappa(\alpha(h)x, y) = \kappa(-[xh], y) = -\kappa(x, [hy]) = -\beta(h)\kappa(x, y)$, azaz $(\alpha(h) + \beta(h))\kappa(x, y) = 0$.)
- Az L Killing-formájának a megszorítása L_0-ra nem-elfajuló. (Biz. Az L féligegyszerű, így a Killing formája L-en nem elfajuló. Másrészt, $0 \neq x \in L_0$-ra $x \perp \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right)$, így $x \not\perp L_0$.

Tétel. $H = C_L(H) (= L_0)$.

Bizonyítás. Legyen $C = C_L(H)$.

- Ha $x \in C$ és $x = x_s + x_n$ a Jordan-felbontása, akkor $x_s, x_n \in C$. (Biz. $\operatorname{ad}_L x_s = (\operatorname{ad}_L x)_s$, $\operatorname{ad}_L x_n = (\operatorname{ad}_L x)_n$ és mindketten 0 konstans tagú polinomjai $\operatorname{ad}_L x$-nek $\Rightarrow$ $\operatorname{ad}_H x = 0$-ból $\operatorname{ad}_H x_s = \operatorname{ad}_H x_n = 0$ következik.)
- C minden féligegyszerű eleme H-ban van. (Biz. Ha $s \in C$ féligegyszerű, akkor $H + \mathbb{C}s$ tórikus részalgebra.)
- A Killing-forma megszorítása H-ra sem elfajuló. (Biz. Legyen $h \in H$, $h \perp H$. Ha $x \in C$ Jordan-felbontása $x = x_s + x_n$, akkor $x_s \in H$, így $\kappa(h, x) = \underbrace{\kappa(h, x_s)}_{=0} + \kappa(h, x_n) = \kappa(h, x_n) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_L h \cdot \operatorname{ad}_L x_n) = 0$, mivel $\operatorname{ad}_L h, \operatorname{ad}_L x_n$ felcserélhetők, és $\operatorname{ad}_L x_n$ nilpotens, így $\operatorname{ad}_L h \cdot \operatorname{ad}_L x_n$ is nilpotens. Tehát $h \perp C$. Mivel C-n a Killing-forma nem-elfajuló, adódik, hogy $h = 0$.)
- Legyen $K = C \cap H^\perp$. Ekkor $K \lhd C$ és $C = H \oplus K$. Mivel $C/H = \{x_n + H \,|\, x \in C\}$, ahol $\operatorname{ad}_C(x_n)$ nilpotens minden $c \in C$-re $\overset{Engel}{\Rightarrow}$ $K \simeq C/H$ nilpotens.
- Tegyük fel, hogy $K \neq 0$. Mivel K nilpotens, $Z(K) \neq 0$, így létezik $0 \neq z \in Z(K) = K \cap Z(C)$ elem. Ekkor $n := z_n \in Z(C)$, így $\operatorname{ad}_L n \operatorname{ad}_L x$ nilpotens minden $x \in C$-re. Tehát $\kappa(n, x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_L n \operatorname{ad}_L x) = 0$ minden $x \in C$-re, így $n \perp C$, ami ellentmondás. Tehát $K = 0$, azaz $H = C$. ☐

Következmény. (Cartan-felbontás) Legyen H Cartan részalgebrája az L féligegyszerű Lie-algebrának, és $\Phi \subset H^*$ a hozzá tartozó gyökrendszer. Ekkor

$$L = H \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha).$$

17. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ részalgebrák

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ részalgebrák keresése

- Láttuk, hogy az L Killing-formájának H-ra vett megszorítása sem elfajuló.
- Tehát tetszőleges $\alpha \in \Phi$-re (sőt akár $\alpha \in H^*$-ra) létezik egyetlen $t_\alpha \in H$, melyre $(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ minden $h \in H$-ra. Így Φ megfeleltethető a $\{t_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi\} \subset H$ halmaznak.

Állítás. Φ generálja H^*-ot.

Bizonyítás. Ha $\langle\Phi\rangle \neq H^*$, akkor van olyan $0 \neq h \in H$, amire $\alpha(h) = 0\, \forall\, \alpha \in \Phi$-re. De akkor $[h, L_\alpha] = 0\, \forall\, \alpha \in \Phi$-re, és persze $[hH] = 0$, így $[hL] = 0$, azaz $h \in Z(L)$, ami ellentmondás. ☐

Állítás. Minden $\alpha \in \Phi$-re $-\alpha \in \Phi$. Továbbá $[L_\alpha L_{-\alpha}] = \langle t_\alpha \rangle$, és $[xy] = \kappa(x,y)t_\alpha$ minden $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$-ra.

Bizonyítás.

- Volt, hogy $L_\alpha \perp L_\beta$, ha $\alpha + \beta \neq 0$. Így, ha $\alpha \in \Phi$, de $-\alpha \notin \Phi$, akkor $0 \neq L_\alpha \perp L$. Ellentmondás.
- Volt, hogy $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subset L_0 = H$. Legyen $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Ekkor minden $h \in H$-ra
$$\kappa(h, [xy]) = \kappa([hx], y) = \kappa(\alpha(h)x, y) = \alpha(h)\kappa(x,y) = \kappa(x,y)\kappa(h, t_\alpha),$$
azaz $H \ni [xy] - \kappa(x,y)t_\alpha \perp H$. Mivel az L Killing-formája a H-n nem elfajuló, adódik, hogy $[xy] = \kappa(x,y)t_\alpha$.
- Az előző pontból adódik, hogy $[L_\alpha L_{-\alpha}] \subset \langle t_\alpha \rangle$. Az egyenlőséghez legyen $0 \neq x \in L_\alpha$. Mivel $x \not\perp L$, van olyan $y \in L_{-\alpha}$, melyre $\kappa(x,y) \neq 0$, így $[xy] = \kappa(x,y)t_\alpha \neq 0$. □

Állítás. Legyenek $\alpha \in \Phi$, és $\beta \in \Phi \cup \{0\}$. Ekkor $h \in [L_\alpha L_{-\alpha}]$-ra
$$\beta(h) = -\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} k \dim(L_{\beta+k\alpha})}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim(L_{\beta+k\alpha})} \cdot \alpha(h).$$
Következésképpen, $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

Bizonyítás.

- Tekintsük a $V = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} L_{\beta+k\alpha} \leq L$ alteret.
- V invariáns $\operatorname{ad} L_\alpha$ és $\operatorname{ad} L_{-\alpha}$ hatására, így $\operatorname{ad} h \in [\operatorname{ad} L_\alpha, \operatorname{ad} L_{-\alpha}]$ hatására is, amiből $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} h_{|V}) = 0$ következik.
- Ebből
$$0 = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} h_{|V}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\beta + k\alpha)(h) \dim(L_{\beta+k\alpha}),$$
amiből az egyenlet átrendezésével adódik az első állítás.
- Ezután, ha $h \in [L_\alpha L_{-\alpha}]$-ra $\alpha(h) = 0$, akkor $\beta(h) = 0$ minden $\beta \in \Phi$-re. Mivel $\langle \Phi \rangle = H^*$, ebből $h = 0$ következik. Így $0 \neq t_\alpha \in [L_\alpha L_{-\alpha}]$-ra $\alpha(t_\alpha) \neq 0$. □

Állítás. Ha $\alpha \in \Phi$ és $x_\alpha \in L_\alpha$ tetszőleges, akkor léteznek $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ és $h_\alpha \in \langle t_\alpha \rangle$ melyekre
$$h_\alpha = [x_\alpha y_\alpha], \quad [h_\alpha x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha y_\alpha] = -2y_\alpha,$$
vagyis a
$$h_\alpha \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_\alpha \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
leképezés megad egy $\langle h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha \rangle \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ izomorfizmust.

Továbbá $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$, és $h_{-\alpha} = -h_\alpha$.

Bizonyítás.

- Mivel $x_\alpha \not\perp L_{-\alpha}$, van olyan $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, melyre $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$.
- Legyen
$$h_\alpha := [x_\alpha y_\alpha] = \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$
- $$[h_\alpha x_\alpha] = \frac{2[t_\alpha x_\alpha]}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} = \frac{2\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)} x_\alpha = 2x_\alpha.$$
Hasonlóan adódik, hogy $[h_\alpha y_\alpha] = -2y_\alpha$. □