Lie Algebrák, 6. Előadás
2024. április 04.

14. Weyl tétele

Weyl tétele

Megjegyzés. Ha $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ ráadásul irreducibilis reprezentáció, akkor a Schur-lemma szerint $c = c_\phi$ skalár leképezés, így ($\mathrm{Tr}(c) = \dim(L)$ alapján) $c = \dim(L)/\dim(V) \cdot 1$.

Tétel. (Weyl) Ha L féligegyszerű Lie algebra, akkor L minden véges dimenziós reprezentációja teljesen reducibilis.

Bizonyítás.

- Legyen $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ véges dimenziós reprezentáció. Ekkor $\phi(L) = 0$, vagy $\phi(L) \subset \mathfrak{gl}(V)$ féligegyszerű részalgebra. Így feltehetjük, hogy $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.
- Legyen $0 < U < V$ valódi részmodulusa V-nek. Célunk, hogy mutassunk egy $W < V$ részmodulust, melyre $V = U \oplus W$.

1. eset: $\dim(V/U) = 1$.

- 1/a. eset: U nem irreducibilis:
  - Legyen $0 < U_1 < U$ valódi részmodulus.
  - Dimenzió szerinti indukciót alkalmazva az $U/U_1 < V/U_1$ modulusokra, van olyan $U_1 < W_1 < V$ részmodulus, melyre $V/U_1 = U/U_1 \oplus W_1/U_1$, azaz $V = U + W_1$ és $U_1 = U \cap W_1$.
  - Dimenzió szerinti indukciót alkalmazva az $U_1 < W_1$ modulusokra, van olyan $W < W_1$ részmodulus, melyre $W_1 = U_1 \oplus W$; ekkor $V = U \oplus W$ teljesül.
- 1/b. eset: U irreducibilis:
  - Mivel L féligegyszerű (elég, hogy $L = [LL]$), az $L \to \mathfrak{gl}(V/U) \simeq \mathbb{C}$ reprezentáció triviális, azaz $L(V) \subset U$, így a $c = \sum_i x_i y_i \in \mathrm{End}(V)$ Casimir elemre is teljesül, hogy $c(V) \subset U$.
  - Speciálisan $\dim(\ker(c)) \geq 1$ és $\mathrm{Tr}(c) = \mathrm{Tr}(c_{|U})$ teljesül.
  - Mivel c felcserélhető L-lel, és U irreducibilis L-modulus, a Schur-Lemma szerint $c_{|U}$ skalár leképezés. $\mathrm{Tr}(c_{|U}) = \mathrm{Tr}(c) = \dim(L) \neq 0$ alapján $c_{|U} \neq 0$ is teljesül.
  - Így $\ker(c) \cap U = 0$, vagyis $V = U \oplus \ker(c)$. Mivel c felcserélhető L-lel, $\ker(c)$ is L-részmodulus.

2. eset: $\dim(V/U) > 1$.

- Legyenek
$$\mathcal{A} = \{f \in \mathrm{End}(V)\,|,\ f(V) \subseteq U,\ \text{és}\ \exists\,\lambda \in \mathbb{C} : f_{|U} = \lambda \cdot 1_{|U}\};$$
$$\mathcal{B} = \{f \in \mathrm{End}(V)\,|,\ f(V) \subseteq U,\ \text{és}\ f_{|U} = 0_{|U}\}.$$
- Ekkor $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, és $\dim(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = 1$.
- $x \in L$, $f \in \mathcal{A}$ esetén minden $v \in V$-re
$$[x, f](v) = (xf - fx)v = x(\underbrace{f(v)}_{\in U}) - \underbrace{f(x(v))}_{\in U} \in U,$$
és $u \in U$ esetén ráadásul
$$[x, f](u) = x(\underbrace{f(u)}_{=\lambda u}) - f(\underbrace{x(u)}_{\in U}) = x(\lambda u) - \lambda x(u) = 0.$$
Tehát $[L, \mathcal{A}] \subset \mathcal{B}$.

- Így definiálhatjuk a $\phi : L \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$, $\phi : x \to \mathrm{ad}_{\mathcal{A}}\, x$ reprezentációt, mely $\mathcal{A}$-t és $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$-t L-modulus struktúrával ruházza fel.
- Használva az első esetet, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \langle f \rangle$, ahol $f_{|U} = 1_{|U}$ és $f(V) = U$, továbbá $\langle f \rangle$ is L-modulus.
- Így $\ker(f) \leq V$ részmodulusa V-nek, melyre $V = U \oplus \ker(f)$ teljesül. □

Állítás. Ha $I \lhd L$ és I féligegyszerű, akkor $L = I \oplus K$ valamely $K \lhd L$-re.
Bizonyítás.

- Az adjungált reprezentációt megszorítva I-re kapunk egy $I \to \mathfrak{gl}(L)$ reprezentációt, melynek magja $\subseteq Z(I) = 0$.
- Így $I \simeq \mathrm{ad}(I) \subset \mathfrak{gl}(L)$ féligegyszerű.
- Weyl tételének alkalmazásával $L = I \oplus K$, ahol $[I, K] \subset K$.
- Mivel $I \lhd L$, egyben $[I, K] \subset I$, így $[I, K] \subset I \cap K = 0$, azaz $K \subset C_L(I)$.
- De $Z(I) = 0 \Rightarrow I \cap C_L(I) = 0$, tehát $K = C_L(I) \lhd L$. □

- Legyen V véges dimenziós $\mathbb{C}$ felett L féligegyszerű Lie-algebra és $L \to \mathfrak{gl}(V)$ hű reprezentáció. $\Rightarrow L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ feltehető.
- Weyl tétele szerint $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, ahol $V_1, \ldots, V_k$ irreducibilis L-modulusok.
- Így $L \subseteq \mathfrak{gl}(V_1) \oplus \mathfrak{gl}(V_2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{gl}(V_k)$. Sőt, mivel $[LL] = L$, így $L \subseteq \mathfrak{sl}(V_1) \oplus \mathfrak{sl}(V_2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{sl}(V_k)$ is teljesül.

Állítás. Az L normálizátora $\mathfrak{sl}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{sl}(V_k)$-ben egyenlő L-lel.
Bizonyítás.

- Legyen N az L normalizátora $\mathfrak{sl}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{sl}(V_k)$-ban.
- Ekkor $L \lhd N$, így az előző állítás szerint $N = L \oplus L'$ (Lie-algebrai direkt összeg).
- Legyen $y \in L'$ tetszőleges. Az előző pont szerint $[y, L] = 0$, tehát a Schur-lemmából adódóan $y_{|V_i} \in \mathfrak{sl}(V_i)$ skalár leképezés minden i-re, így $y = 0$. Vagyis $L' = 0 \Rightarrow N = L$. □

Állítás. Legyen $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ féligegyszerű lineáris Lie-algebra, $x \in L$ és $x = x_s + x_n$ a Jordan-felbontása, ahol $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$. Ekkor $x_s, x_n \in L$.
Bizonyítás.

- Elég belátni, hogy $x_n \in L$;
- Volt korábban, hogy az $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$ leképezésre $(\mathrm{ad}\, x)_s = \mathrm{ad}\, x_s$ és $(\mathrm{ad}\, x)_n = \mathrm{ad}\, x_n$;
- Legyen $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ a V felbontása irreducibilis L-modulusok direkt összegére.
- A Jordan felbontásról szóló tétel szerint $x_n = q(x)$ valamely $q \in \mathbb{C}[x]$, $q(0) = 0$ polinomra. Így V_i egyben x_n-invariáns is minden i-re. Mivel x_n nilpotens, minden sajátértéke 0. Együttesen $x_n \in \mathfrak{sl}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{sl}(V_k)$ adódik.
- Hasonlóan, $\mathrm{ad}\, x_n = (\mathrm{ad}\, x)_n = q'(\mathrm{ad}\, x)$ valamely $q' \in \mathbb{C}[x]$, $q'(0) = 0$ polinomra, amiből $\mathrm{ad}\, x_n(L) \subset \mathrm{ad}\, x(L) \subset L$. Tehát $x_n \in N(L)$ is teljesül.
- Így az előző állításból adódik, hogy $x_n \in L$. □

Következmény. Ha $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ féligegyszerű, és $x \in L$, akkor x közönséges ($\mathrm{End}(V)$-beli) és absztrakt Jordan-felbontása megegyezik.

Bizonyítás.

- Legyen $x = x_s^{(a)} + x_n^{(a)}$ az x absztrakt Jordan-felbontása.
- Definíció szerint $x_s^{(a)}, x_n^{(a)} \in L$, melyekre $\mathrm{ad}_L\, x_s^{(a)} = (\mathrm{ad}_L\, x)_s$ és $\mathrm{ad}_L\, x_n^{(a)} = (\mathrm{ad}_L\, x)_n$.
- Az előző állítás szerint $x_s, x_n \in L$ az $x = x_s + x_n$ közönséges ($\mathrm{End}(V)$-beli) Jordan felbontására. Láttuk korábban azt is, hogy $(\mathrm{ad}\, x)_s = \mathrm{ad}\, x_s$ és $(\mathrm{ad}\, x)_n = \mathrm{ad}\, x_n$, ahol $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_{\mathrm{End}(V)}$.
- $\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n$ fixen hagyja L-et, így $(\mathrm{ad}\, x_s)_{|L} = (\mathrm{ad}_L\, x)_s$, $(\mathrm{ad}\, x_n)_{|L} = (\mathrm{ad}_L\, x)_n$. Az absztrakt Jordan-felbontás egyértelműsége miatt $x_s = x_s^{(a)}$, $x_n = x_n^{(a)}$. □

Egy L féligegyszerű algebra esetén egy $x \in L$ elemet ***féligegyszerű***nek illetve ***nilpotens***nek hívunk, ha $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{End}(L)$ féligegyszerű (diagonalizálható) illetve nilpotens transzformációja $\mathrm{End}(L)$-nek.

Megjegyzés. Az absztrakt Jordan-felbontás szerint L minden eleme előáll egy féligegyszerű és egy nilpotens elem összegeként. (Speciálisan, L tartalmaz féligegyszerű elemeket.)

Következmény. Legyen L féligegyszerű Lie-algebra, és $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ véges dimenziós reprezentáció. Ha $s \in L$ féligegyszerű, akkor $\phi(s) \in \mathrm{End}(V)$ is az.

Bizonyítás.

- Kicsit általánosabban azt mutatjuk meg, hogy ha $x = s + n$ egy tetszőleges $x \in L$ absztrakt Jordan-felbontása, akkor $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ a $\phi(x) \in \mathrm{End}(V)$ közönséges Jordan-felbontása.
- $\mathrm{ad}\, s \in \mathfrak{gl}(L)$ féligegyszerű $\Rightarrow \exists\, b_1, \ldots, b_k \in L$ bázis és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, melyekre $[s, b_i] = \mathrm{ad}\, s(b_i) = \lambda_i b_i$ minden i-re. Ekkor $\mathrm{ad}_{\phi(L)}(\phi(s))(\phi(b_i)) = [\phi(s), \phi(b_i)] = \lambda_i \phi(b_i)$, vagyis $\phi(s) \in \phi(L)$ féligegyszerű.

  Hasonlóan adódik, hogy $\phi(n) \in \phi(L)$ nilpotens.
- Nyilván $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ és $[\phi(s), \phi(n)] = \phi([s, n]) = \phi(0) = 0$. Így $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ a $\phi(x) \in \phi(L)$ absztrakt Jordan-felbontása.
- Mivel $\phi(L) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ féligegyszerű, $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ megegyezik a $\phi(x) \in \mathrm{End}(V)$ közönséges Jordan-felbontásával. □