Lie Algebrák, 5. Előadás
2024. március 21.

11. Absztrakt Jordan-felbontás

Mostantól feltesszük, hogy $T = \mathbb{C}$.

Definíció. Legyen L egy (tetszőleges) Lie-algebra, és $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ rögzített. Ekkor minden $\alpha \in \mathbb{C}$-re legyen

$$L_\alpha := \{a \in A \mid \exists k: \ (\delta - \alpha \cdot 1)^k(a) = 0\}.$$

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy $L_\alpha = 0$, ha α nem sajátértéke δ-nak, és hogy $L = \oplus_\alpha L_\alpha$.

Lemma. A fenti jelöléssel $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$-re. (Speciálisan, L_0 részalgebra.)

Bizonyítás.

- Indukcióval (k szerint) könnyen igazolható a

$$(\delta - (\alpha+\beta)\cdot 1)^k[xy] = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \left[(\delta - \alpha \cdot 1)^s(x), (\delta - \beta \cdot 1)^{k-s}(y)\right]$$

egyenlőség tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$-re, $x, y \in L$-re,

- amiből az állítás adódik $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ választással. □

Lemma. Legyen L egy Lie-algebra, $\delta \in \mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{End}(L)$. Ekkor δ_s, $\delta_n \in \mathrm{Der}(L)$. (Ahol $\delta = \delta_s + \delta_n$ a $\delta \in \mathrm{End}(L)$ Jordan-felbontása.)

Bizonyítás.

- Elég belátni, hogy $\delta_s \in \mathrm{Der}(L)$.
- $L = \oplus_\alpha L_\alpha$ a δ-nak megfelelő felbontás. Ekkor $\delta_s(x) = \alpha x$ minden $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in L_\alpha$-ra.
- Tetszőleges $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$-ra
  - Egyrészt
  $$[\delta(x), y] + [x, \delta(y)] = [\alpha x, y] + [x, \beta y] = (\alpha+\beta)[xy].$$
  - Másrészt, az előző állítás szerint $[xy] \in [L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$, így $\delta[xy] = (\alpha+\beta)[xy]$.
- Ezek után $\delta_s \in \mathrm{Der}(L)$ következik az $L = \oplus_\alpha L_\alpha$ egyenlőségből és δ_s linearitásából. □

Absztrakt Jordan-felbontás

Definíció.

- Legyen L féligegyszerű Lie-algebra.
- Tekintsük az $L \to \mathrm{ad}(L) = \mathrm{Der}(L)$ izomorfizmust. (T: L minden deriválása belső).
- Tetszőleges $x \in L$-re tekintsük az $\mathrm{ad}\, x = (\mathrm{ad}\, x)_s + (\mathrm{ad}\, x)_n$ Jordan-felbontást. (L: $(\mathrm{ad}\, x)_s, (\mathrm{ad}\, x)_n \in \mathrm{Der}(L)$)
- Mivel $L \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{Der}(L)$ izomorfizmus, egyértelműen léteznek $x_s = x_s^{(a)}, x_n = x_n^{(a)} \in L$ elemek, melyekre $\mathrm{ad}(x_s) = (\mathrm{ad}\, x)_s$, $\mathrm{ad}(x_n) = (\mathrm{ad}\, x)_n$.
- Ekkor $x = x_s + x_n$, valamint $[x_s x_n] = 0$.
- Az $x = x_s + x_n$ az $x \in L$ *absztrakt Jordan-felbontása.*
- Az x_s-et illetve x_n-et az x *féligegyszerű* illetve *nilpotens* részének nevezzük.

Megjegyzés. Egy $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ féligegyszerű lineáris Lie-algebra esetén egy $x \in L$-nek látszólag kétféle Jordan-felbontása van:

- Egyrészt, az $\mathrm{End}(V)$-beli közönséges Jordan-felbontása;
- Másrészt, az L-beli absztrakt Jordan-felbontása.

Később látni fogjuk, hogy ez a két felbontás minden ilyen esetben megegyezik.

12. Féligegyszerű Lie-algebrák reprezentációi

L-modulusok

Definíció. (L-modulus) Legyen L Lie-algebra és V vektortér T felett. V egy L-modulus, ha adott egy $L \times V \to V, (x, v) \to x.v$ leképezés, mely

- bilineáris ($(\alpha x + y).v = \alpha x.v + y.v$; $x.(\alpha v + w) = \alpha x.v + x.w$;
- $x, y \in L$ és $v \in V$-re $[xy].v = x.(y.v) - y.(x.v)$.

Megjegyzés. Ahogy „szokásos”, az L-modulusok és az $L \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentációk kölcsönösen megfelelnek egymásnak.

Definíció. Legyen V egy véges dimenziós L-modulus;

- V *egyszerű*, ha pontosan két részmodulusa van; (0 és $V \neq 0$);
- V *teljesen reducibilis*, ha V előáll egyszerű részmodulusok direkt összegeként.

Feladat Igazoljuk, hogy V teljesen reducibilis $\iff$ Minden $W \leq V$ részmodulusnak van direkt kiegészítője. ($W' \leq V$ részmodulus, melyre $V = W \oplus W'$)

Feladat Igazoljuk, hogy V teljesen reducibilis $\iff$ Minden $W \leq V$ részmodulusnak van direkt kiegészítője. ($W' \leq V$ részmodulus, melyre $V = W \oplus W'$)

Feladat Legyen U és V két L-modulus. Definiáljuk L egy hatását $\mathrm{Hom}(U, V)$-n az

$$(x.f)(u) = x.(f(u)) - f(x.u) \quad u \in U,\ x \in L,\ f \in \mathrm{Hom}(U, V)$$

képlettel. Mutassuk meg, hogy ily módon egy L-modulus struktúrát kapunk $\mathrm{Hom}(U, V)$-n.

Feladat Legyenek U és V két L-modulus. Igazoljuk, hogy az

$$x.(u \otimes v) = (x.u) \otimes v + u \otimes (x.v)$$

formula lineáris kiterjesztésével L-modulus struktúrát definiálunk $U \otimes V$-n.

13. Reprezentáció Casimir eleme

Reprezentáció nyom formája

Legyen a továbbiakban L féligegyszerű, és $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ véges dimenziós hű reprezentáció.

Definíció. (Reprezentáció nyom formája) A ϕ *nyom formája* $\beta : L \times L \to \mathbb{C}$, $\beta(x, y) := \mathrm{Tr}(\phi(x) \cdot \phi(y))$.

- A nyomforma a Killing-forma általánosítása: $\phi = \mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(V)$ esetén $\beta = L$ Killing-formája;
- β bilineáris, szimmetrikus és „asszociatív”: $\beta([xy], z) = \beta(x, [yz])$ minden $x, y, z \in L$-re;
- Ha L féligegyszerű, akkor β nem elfajuló: (Biz. $R = \beta$ radikáljára $R \lhd L$ és $R \simeq \phi(R) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ feloldható (Cartan));

Feladat Legyen L egyszerű Lie-algebra ($\mathbb{C}$ felett). Legyen továbbá β_1 és β_2 két nem-elfajuló, szimmetrikus és asszociatív bilineáris függvény L-en. Igazoljuk, hogy $\beta_2 = \lambda \cdot \beta_1$ alkalmas $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

Reprezentáció Casimir eleme

Definíció. Legyen $x_1, \dots, x_n$ bázisa L-nek, és $y_1, \dots, y_n$ az L duális bázisa β-ra nézve (azaz $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ minden i, j-re). A ϕ reprezentáció *Casimir eleme* legyen $c_\phi = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i) \in \mathrm{End}(V)$.

Megjegyzés. Mivel $L \simeq \phi(L) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, egy fix ϕ esetén feltehetjük (és fel is tesszük), hogy $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Ekkor $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$ és $c = \sum_i x_i y_i \in \mathrm{End}(V)$ a Casimir elem. (Általában $c \notin L$!)

Állítás. c független az $x_1, \dots, x_n \in L$ bázistól és $\mathrm{Tr}(c) = \dim(L)$.
Bizonyítás.

- Minden i, j-re legyen $x_i' = \sum_s a_{si} x_s$ és $y_j' = \sum_t b_{tj} y_t$ egy másik duális bázispár L-ben, azaz $\beta(x_i', y_j') = \delta_{ij}$ minden i, j-re.
- Legyenek $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\delta_{ij} = \beta(x_i', y_j') = \sum_s \sum_t a_{si} b_{tj} \beta(x_s, y_t) = \sum_s a_{si} b_{sj} = (A^T B)_{ij},$$

azaz $A^T B = I \Rightarrow AB^T = I$.

- Így

$$\begin{aligned}\sum_i x_i' y_i' &= \sum_i \Big(\sum_s a_{si} x_s\Big)\Big(\sum_t b_{ti} y_t\Big) \\ &= \sum_s \sum_t \Big(\big(\underbrace{\sum_i a_{si} b_{ti}}_{(AB^T)_{st} = \delta_{st}}\big) x_s y_t\Big) = \sum_s x_s y_s = c.\end{aligned}$$

- $\mathrm{Tr}(c) = \mathrm{Tr}(\sum_s x_s y_s) = \sum_s \beta(x_s, y_s) = \sum_s 1 = \dim(L)$. □

Tétel. c felcserélhető $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ minden elemével.
Bizonyítás.

- Legyen $z \in L$, be kell látnunk, hogy $cz = zc$.
- Legyenek $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, melyekre

$$[x_i, z] = \sum_j a_{ij} x_j \text{ és } [y_i, z] = \sum_j b_{ij} y_j \quad \text{minden } i\text{-re.}$$

- Minden $x, y \in L$-re

$$[xy, z] = xyz - xzy + xzy - zxy = x[y, z] + [x, z]y.$$

- Így

$$\begin{aligned}[c, z] &= \sum_i [x_i y_i, z] = \sum_i \big(x_i[y_i, z] + [x_i, z]y_i\big) \\ &= \sum_{i,j} \big(b_{ij} x_i y_j + a_{ij} x_j y_i\big) = \sum_{i,j} \big(b_{ij} + a_{ji}\big) x_i y_j.\end{aligned}$$

- β asszociativitásából minden i, j-re

$$\begin{aligned}a_{ij} &= \sum_s a_{is} \beta(x_s, y_j) = \beta([x_i, z], y_j) = -\beta(x_i, [y_j, z]) \\ &= -\sum_s b_{js} \beta(x_i, y_s) = -b_{ji}, \quad \text{így } [c, z] = 0. \quad \square\end{aligned}$$