Lie Algebrák, 4. Előadás

2024. március 7.

8. A Cartan-kritérium

A feloldhatóság eldöntése: Cartan-kritérium

Mostantól ha nem mondjuk külön, feltesszük, hogy $\mathrm{char}(T) = 0$.

Lemma. Tetszőleges $a, b, c \in \mathrm{End}(V)$-re $\mathrm{Tr}([a,b]c] = \mathrm{Tr}(a[b,c])$.

Bizonyítás.

$$\mathrm{Tr}([a,b]c - a[b,c]) = \mathrm{Tr}(abc - bac - (abc - acb)) = \mathrm{Tr}([ac,b]) = 0.$$

Tétel. (Cartan-kritérium) Legyen $\dim(V) = n < \infty$. Egy $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ részalgebra feloldható $\iff$ $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ minden $x \in [LL]$, $y \in L$-re.

Bizonyítás.

- Feltehető, hogy $T = \mathbb{C}$.
  - Legyen $b_1, \dots, b_k$ bázisa $L \subset \mathfrak{gl}(n,T)$-nek, $\{\beta_{ij}^s \mid 1 \le i,j \le n,\ 1 \le s \le k\}$ a $b_1, \dots, b_k$ mátrixok elemei, és $T_0 = \mathbb{Q}(\beta_{ij}^s \mid 1 \le i,j \le n, 1 \le s \le k) \le T$. Ekkor T_0 izomorf $\mathbb{C}$ egy résztestével.
  - Legyen $L_0 = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{T_0}$. Ekkor $L = T \otimes_{T_0} L_0$. Legyen továbbá $\widehat{L} = \mathbb{C} \otimes_{T_0} L_0$.
  - Könnyen látható, hogy a Cartan-kritériumban szereplő feltételek ugyanakkor teljesülnek L-re, L_0-ra és $\widehat{L}$-re.
- $\Rightarrow$
  - Lie tételéből V egy alkalmas bázisában minden $y \in L$ felső háromszögmátrix,
  - így (ugyanebben a bázisban) minden $x \in [LL]$ szigorúan felső háromszögmátrix.
  - Tehát, ha $x \in [LL]$, $y \in L$, akkor xy szigorúan felső háromszögmátrix $\Rightarrow \mathrm{Tr}(xy) = 0$.
- $\Leftarrow$
  - Cél: $x \in \mathrm{End}(V)$ nilpotens $\forall x \in [LL]$-re $\overset{Engel}{\Rightarrow}$ $[LL]$ nilpotens $\Rightarrow$ L feloldható.
  - Legyen $x \in [LL]$, $x = s + n$ az x Jordan-felbontása.
  - Az s sajátvektoraiból álló bázist választva feltehető, hogy $s \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ diagonális mátrix. Legyenek az s sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
  - Legyen $\overline{s} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ az s „konjugáltja”, azaz ugyanebben a bázisban $\overline{s} = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_n})$.
  - Ekkor az E_{ij} szokásos bázisában $\mathrm{ad}\, s$ és $\mathrm{ad}\, \overline{s}$ diagonálisak, valamint

$$\mathrm{ad}\, s \text{ sajátértékei } \{\lambda_i - \lambda_j \mid 1 \le i,j \le n\}$$
$$\mathrm{ad}\, \overline{s} \text{ sajátértékei } \{\overline{\lambda_i - \lambda_j} \mid 1 \le i,j \le n\}$$

  - $\forall i,j,k,l$-re $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_k - \lambda_l \iff \overline{\lambda_i - \lambda_j} = \overline{\lambda_k - \lambda_l}$ és $\lambda_i - \lambda_j = 0 \iff \overline{\lambda_i - \lambda_j} = 0$, így van olyan $f \in \mathbb{C}[x]$, $f(0) = 0$ interpolációs polinom, melyre $f(\lambda_i - \lambda_j) = \overline{\lambda_i - \lambda_j}$ $\forall i,j$-re, azaz $\mathrm{ad}\, \overline{s} = f(\mathrm{ad}\, s)$.
  - Mivel $\mathrm{ad}\, s = (\mathrm{ad}\, x)_s$, van olyan $p \in \mathbb{C}[x]$, $p(0) = 0$, amire $\mathrm{ad}\, s = p(\mathrm{ad}\, x) \Rightarrow \mathrm{ad}(\overline{s}) = f(p(\mathrm{ad}\, x))$ és $f(p(0)) = 0$.
  - Így $\mathrm{ad}\, \overline{s}(L) \subset \mathrm{ad}\, x(L) \subset [LL]$.
  - Legyen $x = \sum_s [u_s, v_s] \in [LL]$, ahol $u_s, v_s \in L$.

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \mathrm{Tr}(s\overline{s}) = \mathrm{Tr}(x\overline{s}) = \sum_s \mathrm{Tr}([u_s, v_s]\overline{s})$$
$$= \sum_s \mathrm{Tr}(u_s \underbrace{[v_s, \overline{s}]}_{\in [LL]}) = 0.$$

  - Tehát $s = 0$, azaz $x = n$ nilpotens. □

Következmény. L véges dimenziós, $\mathrm{char}(T) = 0$. Ekkor L feloldható $\iff$ $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y) = 0$ minden $x \in [LL]$, $y \in L$-re.

Bizonyítás. L feloldható $\iff$ $L/Z(L) \simeq \mathrm{ad}(L) \subset \mathfrak{gl}(L)$ feloldható $\overset{Cartan}{\iff}$ $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y) = 0$ minden $x \in [LL]$, $y \in L$-re.

9. A Killing-forma

A Killing-forma

Definíció. (Killing-forma) Egy L véges dimenziós Lie-algebra *Killing formájának* hívjuk az

$$\kappa = \kappa_L : L \times L \to T, \quad \kappa(x,y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y)$$

leképezést.

Megjegyzések.

- A Killing-forma szimmetrikus bilineáris függvény L-en.
- A Killing-forma *„asszociatív"*: $\kappa([xy],z) = \kappa(x,[yz])$ minden $x,y,z \in L$-re.
  Bizonyítás:
  $$\begin{aligned}\kappa([xy],z) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[xy] \cdot \mathrm{ad}\, z) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] \cdot \mathrm{ad}\, z) \\ &\overset{volt}{=} \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot [\mathrm{ad}\, y, \mathrm{ad}\, z]) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}([y,z])) = \kappa(x,[yz]).\end{aligned}$$
- Cartan-kritérium: L feloldható $\iff$ $\kappa(x,y) = 0 \;\forall x \in [LL],\; y \in L$-re.

Lemma. Legyen $I \lhd L$. Ekkor az L Killing formájának az I-re vett megszorítása az I Killing-formája, azaz $x,y \in I$ esetén $\kappa_I(x,y) = \kappa_L(x,y)$.

Bizonyítás.

- Általában, ha $W \le V$ altér és $x \in \mathrm{End}(V)$-re $x(V) \subset W$, akkor $\mathrm{Tr}(x_{|W}) = \mathrm{Tr}(x)$. Ehhez egészítsük ki W bázisát V egy bázisává, és írjuk fel x mátrixalakját:
  $$x = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}(x_{|W}) = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(0) = \mathrm{Tr}(x).$$
- Alkalmazva ezt $\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y \in \mathrm{End}(L)$-re, ahol $x,y \in I$ és kihasználva, hogy $\mathrm{ad}_L\, x(I) \subset I$ és $\mathrm{ad}_L\, y(I) \subset I$:
  $$\begin{aligned}\kappa_L(x,y) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_L\, x \cdot \mathrm{ad}_L\, y) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}_L\, x \cdot \mathrm{ad}_L\, y)_{|I}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_I\, x \cdot \mathrm{ad}_I\, y) = \kappa_I(x,y). \quad \square\end{aligned}$$

10. Féligegyszerű Lie-algebrák

Kritériumok a féligegyszerűségre

- Emlékeztető: L féligegyszerű, ha $\mathrm{Rad}(L) = 0$.
- A Killing-forma *radikálja*:
  $$\mathrm{rad}_\kappa := \{x \in L \mid \kappa(x,y) = 0 \;\forall y \in L\text{-re}\}.$$
- A Killing-forma nem-elfajuló, ha $\mathrm{rad}_\kappa = 0$.

Tétel. Az L féligegyszerű $\iff$ A Killing-forma nem elfajuló.

Bizonyítás.

- $\Rightarrow$
  - $I := \mathrm{rad}_\kappa \lhd L$ (mert a Killing-forma „asszociatív");
  - $x,y \in I = \mathrm{rad}_\kappa$-ra $\kappa_I(x,y) = \kappa_L(x,y) = 0 \overset{Cartan}{\Rightarrow} \mathrm{rad}_\kappa$ feloldható.
  - Így az L féligegyszerűségéből $\mathrm{rad}_\kappa = 0$ következik.

- $\Leftarrow$
  - Korábban szerepelt, hogy egy Lie-algebra pontosan akkor féligegyszerű, ha nem tartalmaz $\neq 0$ kommutatív ideált.
  - Tegyük fel, hogy $I \lhd L$ kommutatív ideál, $x \in I$ és $y \in L$. Ekkor
$$L \xrightarrow{\operatorname{ad} x} I \xrightarrow{\operatorname{ad} y} I \xrightarrow{\operatorname{ad} x} 0.$$
  - Így $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)^2 = 0 \Rightarrow \kappa(x,y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$. Vagyis $I \subset \operatorname{rad}_\kappa = 0$. □

Tétel. L féligegyszerű $\iff$ $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, ahol L_i egyszerű minden i-re.

Bizonyítás. $\Rightarrow$

- Legyen $0 \neq I \lhd L$, és $I^\perp = \{x \in L \mid \kappa(x,y) = 0 \ \forall\, y \in I\}$.
- Ha $x \in I^\perp$, $y \in I$ és $z \in L$, akkor $\kappa([xz], y) = \kappa(x, \underbrace{[zy]}_{\in I}) = 0$, így $I^\perp \lhd L$.
- $I \cap I^\perp \lhd L$, így az $I \cap I^\perp$ Killing-formája az L Killing-formájának a megszorítása $I \cap I^\perp$-re, ami azonosan 0 $\overset{Cartan}{\Rightarrow}$ $I \cap I^\perp$ feloldható, és így $I \cap I^\perp = 0$.
- Mivel $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$, adódik, hogy $L = I \oplus I^\perp$ (Lie-algebra értelemben is direkt összeg.)
- Az L Killing-formájának I-re illetve $I^\perp$-re vett megszorítása sem elfajuló $\Rightarrow$ I és $I^\perp$ is féligegyszerű.
- $\dim L$-re vonatkozó indukcióval adódik a tétel. □

Féligegyszerű Lie-Algebrák derivációi

Állítás. Egy L tetszőleges Lie-algebrára $\operatorname{ad} L \lhd \operatorname{Der}(L)$. Továbbá,
$$[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} \delta(x)$$
minden $\delta \in \operatorname{Der}(L)$, és $x \in L$-re.

Bizonyítás. Ha $\delta \in \operatorname{Der}(L)$, és $x, y \in L$, akkor
$$[\delta, \operatorname{ad} x](y) = \delta(\operatorname{ad} x(y)) - \operatorname{ad} x(\delta(y)) = \delta[xy] - [x\delta(y)] = ([\delta(x)y] + [x\delta(y)]) - [x\delta(y)] = \operatorname{ad} \delta(x)(y),$$
azaz $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} \delta(x) \in \operatorname{ad} L$.

Tétel. Ha L féligegyszerű, akkor $\operatorname{ad}(L) = \operatorname{Der}(L)$, azaz féligegyszerű Lie-algebra minden derivációja belső.

Bizonyítás.

- Legyen $M = \operatorname{ad} L$ és $D = \operatorname{Der}(L)$, ekkor $M \lhd D$, így M Killing-formája megegyezik a D Killing-formájának az M-re vett megszorításával.
- Mivel $Z(L) = 0$, $L \simeq \operatorname{ad}(L) = M$, így M is féligegyszerű, tehát M Killing-formája ($= D$ Killing-formájának a megszorítása) sem elfajuló.
- Tehát $D = M \oplus K$ (Lie-algebrai direkt összeg), ahol $K = M^\perp = \{x \in D \mid \kappa(x,y) = 0 \ \forall\, y \in M\} \lhd D$.
- Ha $\delta \in K$ és $x \in L$, akkor $0 = [\delta, \underbrace{\operatorname{ad} x}_{\in M}] = \operatorname{ad} \delta(x)$, azaz $\delta(x) \in Z(L) = 0 \Rightarrow \delta = 0$. Így $K = 0$, azaz $D = M$. □