Lie Algebrák, 3. Előadás
2024. február 29.

6. Lie tétele

Lie tétele

Mostantól általában fel fogjuk tenni, hogy $\mathrm{char}(T)=0$. Gyakran azt is, hogy T algebrailag zárt. (Ezek után már nem nagy megszorítás, ha úgy vesszük, hogy $T=\mathbb{C}$.)

Tétel. Legyen T algebrailag zárt, $\mathrm{char}(T)=0$, $V\neq 0$ véges dimenziós vektortér, és $L\leq \mathfrak{gl}(V)$ feloldható részalgebra. Ekkor létezik $v\in V$ közös sajátvektora L elemeinek, azaz egy $0\neq v\in V$ és egy $\lambda: L\to T$ lineáris függvény, melyekre $x(v)=\lambda(x)v$ minden $x\in L$-re.

Bizonyítás.

- Mivel L feloldható, $[LL]<L$. Legyen $[LL]\leq M<L$ maximális altér. Ekkor $M\triangleleft L$ és $\mathrm{codim}_L(M)=1$, így $L=M+Tx$ tetszőleges $x\in L\setminus M$-re.
- Indukció $M\leq\mathfrak{gl}(v)$-re: Van olyan $\lambda: M\to T$, amire

$$W:=W_\lambda=\{w\in V\mid \forall\, y\in M\text{-re } y(w)=\lambda(y)w\}\neq 0$$

- *Ha belátjuk*, hogy W egy x-invariáns altér, készen vagyunk: Ekkor, mivel T algebrailag zárt, $x_{|W}\in\mathfrak{gl}(W)$-nek van egy $v\in W$ sajátvektora, ami közös sajátvektora $L=M+Tx$ elemeinek.
- $x(W)\subset W \iff \forall\, y\in M,\ \forall\, w\in W$-re

$$\lambda(y)x(w)=y(x(w))=x(y(w))-[x,y](w)=\lambda(y)x(w)-[x,y](w).$$

  Azt kell tehát belátni, hogy $[x,y](w)=0$ minden $y\in M,\ w\in W$-re, azaz $\lambda([x,y])=0$ ha $y\in M$.
- Legyen $0\neq w\in W$ tetszőleges rögzített vektor, és k a legnagyobb olyan, hogy $w,x(w),x^2(w),\dots,x^{k-1}(w)$ még függetlenek.
- Legyenek az $U_0<U_1<\ldots<U_k$ alterek $U_0=\{0\}$ és $U_i=\langle w,\dots,x^{i-1}(w)\rangle$ minden $1\leq i\leq k$-ra. Ekkor minden i-re $\dim(U_i)=i$, valamint $x(U_k)\subset U_k$.
- Indukcióval belátjuk, hogy $y(x^i(w)+U_i)=\lambda(y)x^i(w)+U_i$ minden $y\in M$-re és $i=0,\dots,k-1$-re. (Speciálisan M stabilizálja minden U_i-t). Ez $i=0$-ra nyilvánvaló. Ha $0,\dots,i-1$-re már tudjuk, akkor $i>0$ esetén:

$$\begin{aligned} y(x^i(w)+U_i)&=yx^i(w)+U_i=\underbrace{\underbrace{[yx]}_{\in M}(x^{i-1}(w))}_{\in U_i}+xy(x^{i-1}(w))+U_i\\ &=x(\lambda(y)x^{i-1}(w)+\underbrace{w'}_{\in U_{i-1}})+U_i=\lambda(y)x^i(w)+U_i.\end{aligned}$$

- Tehát U_k egyben M-invariáns is. Nézzük M hatását U_k-n. Az előző pont alapján, egy $y\in M$ mátrixalakja az $\{w,x(w),\dots,x^{k-1}(w)\}$ bázisban felső háromszögmátrix, melynek főátlójában csupa $\lambda(y)$ áll, melynek nyoma $\mathrm{Tr}(y_{|U_k})=k\cdot\lambda(y)$.

- Másrészt, ha $y \in M$, akkor, kihasználva, hogy U_k egyben x-invariáns is, $\mathrm{Tr}([x,y]_{|U_k}) = \mathrm{Tr}(x_{|U_k} y_{|U_k}) - \mathrm{Tr}(y_{|U_k} x_{|U_k}) = 0$.
- Tehát bármely $y \in M$-re $k \cdot \lambda([x,y]) = \mathrm{Tr}([x,y]_{|U_k}) = 0$, így a $\mathrm{char}(T) = 0$ feltételt kihasználva $\lambda([x,y] = 0$ adódik. □

Következmény. (Lie tétele) Legyenek $\mathrm{char}(T) = 0$, T algebrailag zárt, és $\dim(V) = n < \infty$. Ha $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ feloldható részalgebra, akkor V egy alkalmas bázisában L minden eleme felső háromszögmátrix alakú, azaz $L \subseteq \mathfrak{t}(n,T)$.

Következmény. Ha L véges dimenziós Lie algebra $\mathbb{C}$ felett, akkor létezik olyan $0 = L_0 < L_1 < \ldots < L_k = L$, melyekre $L_i \lhd L$-ben és $\dim(L_{i+1}/L_i) = 1$ minden $i < k$-ra.

Bizonyítás. Alkalmazzuk Lie tételét az $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ leképezés képére.

Következmény. Ha L véges dimenziós feloldható Lie-algebra $\mathbb{C}$ felett, akkor minden $x \in [LL]$-re $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}_L\, x$ nilpotens. Következésképpen $[LL]$ nilpotens Lie-algebra.

Bizonyítás.

- Alkalmazzuk Lie tételét az $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ leképezés képére.
- Ha $x = \sum_i [y_i z_i]$, akkor $\mathrm{ad}\, x = \sum_i [\mathrm{ad}\, y_i, \mathrm{ad}\, z_i]$ szigorúan felső háromszögmátrix, így $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{End}(L)$ nilpotens.
- Tehát $\mathrm{ad}_{[LL]}\, x$ is nilpotens minden $x \in [LL]$-re, így Engel tétele szerint $[LL]$ nilpotens Lie-algebra.

Megjegyzés. Ez utóbbi következmény érvényben marad tetszőleges 0 karakterisztikájú test esetében is.

Skalárok kiterjesztése

Lie tétele egyes esetekben jól használható akkor is, ha T nem algebrailag zárt. A „kulcs", hogy a Lie-algebra struktúrát kiterjesztjük a T algebrai lezártja fölötti Lie-algebrává.

Definíció. Legyen T egy test, $\widehat{T} > T$ és L Lie-algebra T fölött. Definiálunk egy $\widehat{L}$ Lie-algebrát $\widehat{T}$ felett a következőképpen:

- Legyen $\widehat{L} = \widehat{T} \otimes_T L$, mint $\widehat{T}$-vektortér.
- Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázisa L-nek (T fölött), és $\gamma_{ij}^k \in T$ $(1 \le i,j,k \le n)$ a megfelelő struktúrakonstansok.
- Tekinthetjük $b_1, \ldots, b_n$-et, mint $\widehat{L}$ bázisát ($\widehat{T}$ fölött), a $b_i \leftrightarrow 1 \otimes b_i$ azonosítással. Ekkor definiálhatunk egy Lie-algebra struktúrát $\widehat{L}$-en a γ_{ij}^k struktúrakonstansok segítségével.

Állítás. A fenti jelölés mellett L feloldható $\iff$ $\widehat{L}$ feloldható és L nilpotens $\iff$ $\widehat{L}$ nilpotens.

Bizonyítás. $(\widehat{T} \otimes L)^{(i)} = \widehat{T} \otimes_T L^{(i)}$ és $(\widehat{T} \otimes L)^i = \widehat{T} \otimes_T L^i$ minden i-re.

7. A Jordan–Chevalley felbontás

A Jordan–Chevalley felbontás

Motiváció. Legyen T algebrailag zárt ($\mathrm{char}(T)$ tetszőleges) és V véges dimenziós vektortér T felett. A Jordan-féle normálalakból tetszőleges $x \in \mathrm{End}(V)$ mátrixalakja alkalmas bázisban Jordan-blokkok összege. Így x mátrixa felbomlik egy diagonális és egy nilpotens mátrix összegére, melyek egymással felcserélhetőek.

Definíció. Az $x \in \mathrm{End}(V)$ féligegyszerű, ha a minimálpolinomjának nincs többszörös gyöke $\iff$ x diagonalizálható.

Tétel. Legyen V véges dimenziós vektortér az algebrailag zárt T test felett, és $x \in \mathrm{End}(V)$. Ekkor

1. Egyértelműen léteznek $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$, melyekre $x = x_s + x_n$, x_s féligegyszerű, x_n nilpotens és $x_s x_n = x_n x_s$.
2. Léteznek $p(t), q(t) \in T(t)$, melyekre $p(0) = q(0) = 0$ és $x_s = p(x),\ x_n = q(x)$.
3. Ha $y \in \mathrm{End}(V)$ felcserélhető x-szel, akkor felcserélhető x_s-sel és x_n-nel is.

Bizonyítás.

- Legyen az x karakterisztikus polinomja $k_x(t) = \prod_{i=1}^{s}(t - \lambda_i)^{m_i}$ és minden i-re $V_i = \ker(x - \lambda_i^{m_i})$. Ekkor $V = \oplus_i V_i$.
- Használjuk a $T[x]$-beli kínai maradéktételt, hogy találjunk egy $p(t) \in T[t]$ polinomot, melyre

$$\begin{aligned} &p(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t-\lambda_i)^{m_i}} \quad \forall\, 1 \le i \le s; \\ &p(t) \equiv 0 \pmod{t}. \end{aligned}$$

- Legyenek $q(t) = t - p(t)$ és $x_s = p(x),\ x_n = q(x)$. Ekkor (2.) és (3.) nyilvánvalóan teljesülnek.
- Tetszőleges i-re V_i-t stabilizálja x, és az $x_{|V_i}$ karakterisztikus polinomja $(t - \lambda_i)^{m_i}$. Így $(x_s)_{|V_i} = (p(x))_{|V_i} = \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{V_i}$. Tehát x_s diagonalizálható, és $x_n = x - x_s$ nilpotens.
- Egyértelműség: Legyen $x = s + n$ is egy (1.)-nek megfelelő felbontás. Ekkor $s + n = x_s + x_n$, ahol (3.) szerint s, n, x_s, x_n mind felcserélhetőek. Így $s - x_s = x_n - n$ egyszerre diagonalizálható és nilpotens, tehát $s - x_s = x_n - n = 0$. □

Megjegyzés. A tételben szereplő x_s-et és x_n-et az $x \in \mathrm{End}(V)$ féligegyszerű illetve nilpotens részének hívjuk.

Lemma. Legyen V véges dimenziós T (algebrailag zárt) felett és $x \in \mathrm{End}(V)$ Jordan-felbontása $x = x_s + x_n$, akkor $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$-re $(\mathrm{ad}\, x)_s = \mathrm{ad}\, x_s$ és $(\mathrm{ad}\, x)_n = \mathrm{ad}\, x_n$, tehát $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ az $\mathrm{ad}\, x$ Jordan-felbontása.

Bizonyítás.

- Mivel x_n nilpotens, $\mathrm{ad}\, x_n$ is az. (volt)
- Ha x_s diagonális alakja $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, akkor a mátrixalakra áttérve, az $\{E_{ij} \mid 1 \le i, j \le k\}$ (szokásos) bázis elemeire $\mathrm{ad}\, x_s(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$, vagyis $\mathrm{ad}\, x_s$ diagonalizálható.
- $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}(x_s + x_n) = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ és $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n] = \mathrm{ad}[x_s, x_n] = 0$, így a Tétel (1.) része alapján kész vagyunk.