Lie Algebrák, 2. Előadás
2024. február 22.

4. Feloldható és nilpotens Lie-algebrák

Feloldható és nilpotens Lie-algebrák

- Egy L Lie-algebrára definiáljuk a következő láncait ideáloknak:
  - L *derivált lánca*: $L = L^{(0)} \geq L^{(1)} \geq \ldots$, ahol
  $$L^{(1)} = L' = [LL],\ L^{(2)} = \big(L^{(1)}\big)', \ldots, L^{(k)} = (L^{(k-1)})', \ldots.$$
  - L *leszálló (alsó) centrális lánca*: $L = L^0 \geq L^1 \geq \ldots$, ahol
  $$L^1 = [LL],\ L^2 = [LL^1], \ldots, L^k = [LL^{k-1}], \ldots.$$
- Minden i-re $L^{(i)}/L^{(i+1)}$ Abel Lie-algebra, és minden i-re $L^i/L^{i+1} \subset Z(L/L^{i+1})$.
- L *feloldható*, ha van olyan n, hogy $L^{(n)} = 0$; L *nilpotens*, ha van olyan n, hogy $L^n = 0$.
- Minden i-re $L^{(i)} \subset L^i$, így
$$(L \text{ Abel} \Longrightarrow)\ L \text{ nilpotens} \Longrightarrow L \text{ feloldható}.$$

Példa:

- $\mathfrak{n}(k,T) = \{(a_{st}) \in \mathfrak{gl}(k,T) \,|\, a_{st} = 0 \ \text{ ha } s \geq t\}$ (a szigorúan felső háromszög mátrixok részalgebrája);
- $\mathfrak{t}(k,T) = \{(a_{st}) \in \mathfrak{gl}(k,T) \,|\, a_{st} = 0 \ \text{ ha } s > t\}$ (a felső háromszög mátrixok részalgebrája).
- $\mathfrak{d}(k,T) = \{(a_{st}) \in \mathfrak{gl}(k,T) \,|\, a_{st} = 0 \ \text{ ha } s \neq t\}$ (a diagonális mátrixok részalgebrája).

Állítás:

- $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(k,T)$ nilpotens Lie algebra,
$$\mathfrak{n}^i = \{(a_{st}) \in T^{k\times k} \,|\, a_{st} = 0 \ \text{ ha } t - s \leq i\}, \text{ és } \mathfrak{n}^k = 0.$$
Vagyis $\mathfrak{n}^i$ azokból a szigorúan felső háromszögmátrixokból áll, melyben a főátló feletti azzal párhuzamos i átlóban csupa 0 van.
- $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(k,T)$ feloldható, de nem nilpotens: $\mathfrak{t}' = \mathfrak{n}$ és $\mathfrak{t}^i = \mathfrak{n}$ minden $i \geq 1$-re.
- $\mathfrak{d}(k,T)$ kommutatív Lie-algebra.

Állítás:

- Feloldható Lie algebra minden részalgebrája és minden faktora is feloldható.
- Ha $I \lhd L$, valamint I és L/I mindketten feloldhatóak, akkor L is feloldható.
- Ha I_1, I_2 mindketten feloldható ideáljai L-nek, akkor $I_1 + I_2$ is feloldható ideálja L-nek. (Biz. Alkalmazzuk az előző állításokat $(I_1 + I_2)/I_2 \simeq I_1/(I_1 \cap I_2)$-re és I_2-re.)

Következmény: Ha L véges dimenziós, akkor L-nek létezik legnagyobb feloldható ideálja. (L *radikálja*, jele $\mathrm{Rad}(L)$.)

Definíció.

- Az L *egyszerű*, ha nem létezik $\neq 0, \neq L$ ideálja és $\dim(L) > 1$.
- Az L *féligegyszerű*, ha nem létezik $\neq 0$ feloldható ideálja ($\iff \mathrm{Rad}(L) = 0$).

Állítás: L féligegyszerű $\iff$ L-nek nem létezik nilpotens ideálja $\iff$ L-nek nem létezik kommutatív ideálja.

Bizonyítás. Ha $I \lhd L$ feloldható, $I^{(n-1)} \neq 0$, de $I^{(n)} = 0$, akkor $I^{(n-1)}$ kommutatív ideálja L-nek. A többi nyilvánvaló. $\square$

Állítás: Ha L véges dimenziós, akkor $L/\operatorname{Rad}(L)$ féligegyszerű.

Állítás: Ha $L_1, \ldots, L_k$ egyszerű Lie-algebrák, akkor $L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ féligegyszerű.

Állítás:

- L nilpotens $\iff$ $\exists\, n : [x_1[x_2[\ldots[x_{n-1}x_n]\ldots]] = 0$ minden $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$-re.
- Nilpotens Lie-algebra minden részalgebrája és faktora is nilpotens.
- Ha $L \neq 0$ nilpotens, akkor $Z(L) \neq 0$. (Biz: Ha $L^n \neq 0$, de $L^{n+1} = [L^n L] = 0$, akkor $L^n \subseteq Z(L)$.
- Ha $L/Z(L)$ nilpotens, akkor L nilpotens. (Biz: Valamely n-re $(L/Z(L))^n = 0 \iff L^n \subseteq Z(L) \iff L^{n+1} = 0$.)

5. Engel tétele

Lemma. Ha $a \in \operatorname{End}(V)$ nilpotens lineáris leképezés (azaz $\exists\, k : a^k = 0$), akkor $\operatorname{ad} a = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} a$ is nilpotens.

Bizonyítás.

- Legyenek $b_a, j_a \in \operatorname{End}(\operatorname{End}(V))$ az a-val balról illetve jobbról szorzással definiált leképezések, azaz $b_a(x) = ax$ és $j_a(x) = xa$ minden $x \in \operatorname{End}(V)$-re.
- Ekkor b_a és j_a felcserélhetőek, és ha $a^k = 0$, akkor $(b_a)^k = (j_a)^k = 0$.
- Alkalmazva a binomiális tételt
$$(\operatorname{ad} a)^{2k-1} = (b_a - j_a)^{2k-1} = \sum_{s=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{s} b_a^s\, j_a^{2k-1-s} = 0$$

Megjegyzés: A megfordítás nem igaz. (Például $a = I$-re $\operatorname{ad} a = 0$.)

Engel tétele

Tétel. Legyen $V \neq 0$ véges dimenziós vektortér, és $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ részalgebra, melynek minden eleme nilpotens leképezés ($\operatorname{End}(V)$-ben). Ekkor van olyan $0 \neq v \in V$, melyre $L(v) = 0$.

Bizonyítás.

- $\dim(L)$ szerinti indukciót alkalmazunk. Az állítás $\dim L = 1$ esetén igaz. (Ha $x \in \operatorname{End}(V)$ nilpotens, akkor 0 az x egyetlen sajátértéke.)
- Legyen $K \subsetneq L$ maximális (Lie) részalgebra L-ben.
- Nézzük az $\operatorname{ad}_L : K \to \mathfrak{gl}(L)$ leképezést. Mivel K invariáns altere $\operatorname{ad}_L(K)$-nak, ez definiál egy $\operatorname{ad}_{L/K} : K \to \mathfrak{gl}(L/K)$ leképezést.
- $\operatorname{ad}_{L/K}(K) \subset \mathfrak{gl}(L/K)$ minden eleme nilpotens a Lemma szerint.
- $\dim(\operatorname{ad}_{L/K}(K)) < \dim(L)$, így (indukció szerint) létezik $x \in L$, $x \notin K$, melyre $\operatorname{ad}_L(K)(x + K) = K$, azaz $[Kx] \subset K$.
- Így $K \lhd K + Tx$ és $K + Tx$ egy K-nál bővebb részalgebra L-ben. K maximalitása folytán $L = K + Tx$.

- Legyen $W := \{v \in V \mid Kv = 0\} \leq V$. Az indukciós feltételt $K \subset \mathfrak{gl}(V)$-re alkalmazva $W \neq 0$ adódik.
- A W egy x-invariáns altér: Bármely $y \in K$, $w \in W$-re

$$yx(w) = xy(w) - \underbrace{[x, y]}_{\in K}(w) = 0$$

- Véve egy tetszőleges $0 \neq v \in W$ sajátvektorát x-nek, $L(v) = 0$ teljesül.

Következmény. Ha $\dim_T(V) = n$ és $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ minden eleme nilpotens, akkor létezik V-nek olyan bázisa, melyben $L \subseteq \mathfrak{n}(n, T)$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $0 \neq v_1 \in V$-t, melyre $L(v_1) = 0$. Nézzük az $L \to \mathfrak{gl}(V/\langle v_1 \rangle)$ természetes hatást $(x(u + \langle v_1 \rangle) := x(u) + \langle v_1 \rangle)$ és alkalmazzunk $\dim(V)$ szerinti indukciót.

Tétel. (Engel) Ha L véges dimenziós Lie algebra és minden $a \in L$-re $\operatorname{ad} a \in \operatorname{End}(L)$ nilpotens, akkor L nilpotens Lie algebra.

Megjegyzés. Ez éppen azt jelenti, hogy ha van olyan k, hogy $[\underbrace{x[x[\ldots[x}_{k \text{ db } x}, y]\ldots]] = 0$ minden $x, y \in L$-re, akkor van olyan n is, hogy $[x_1[x_2[\ldots[x_{n-1}, x_n]\ldots]] = 0$ minden $x_1, \ldots, x_n \in L$-re.

Bizonyítás.

- Nézzük az $\operatorname{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ leképezést, és legyen $K = \operatorname{ad}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ ennek a képe.
- A fenti következmény szerint alkalmas bázisban $K \subset \mathfrak{n}(n, T)$ részalgebra.
- Tehát $K \simeq L/Z(L)$ nilpotens, így L is nilpotens.