

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges T test felett izomorfizmus erejéig pontosan két különböző 2 dimenziós Lie algebra létezik
2. Igazoljuk, hogy a 3 dimenziós valós euklideszi téren az $[xy] := x \times y$ vektoriális szorzatot, mint Lie-zárójelet bevezetve egyszerű Lie algebrát kapunk.
3. Az $L = \mathfrak{sl}(V)$ Lie-algebrára határozzuk meg $L' := [LL]$ -et és $Z(L)$ -et.
4. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{sl}(V)$ pontosan akkor egyszerű, ha $\text{char}(T) \nmid \dim(V)$.
5. Legyen $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{pmatrix}$, és tekintsük az $\mathfrak{so}(2\ell + 1, T) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) \mid A^T M + MA = 0\}$ ortogonális mátrix Lie-algebrát. Adjuk meg $\mathfrak{so}(2\ell + 1, T)$ dimenzióját.
6. Mutassuk meg, hogy az

$$A_\ell = \mathfrak{sl}(\ell + 1, T), \quad B_\ell = \mathfrak{so}(2\ell + 1, T), \quad C_\ell = \mathfrak{sp}(2\ell, V), \quad \text{és} \quad D_\ell = \mathfrak{so}(2\ell, T)$$

mátrix Lie-algebrák mindegyikének van olyan bázisa, melynek minden eleme vagy nilpotens, vagy diagonális mátrix, és ezen báziselemek közül pontosan ℓ darab diagonális.

7. Mutassuk meg, hogy ha A tetszőleges asszociatív algebra, akkor az $[x, y] := xy - yx$ kommutátor, mint Lie-zárójel egy Lie-algebra struktúrát definiál A -n.
8. Igazoljuk, hogy $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der}(A)$ esetén $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \in \text{Der}(A)$.
9. Mutassunk példát $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der}(A)$ -ra, melyekre $\delta_1\delta_2 \notin \text{Der}(A)$.
10. Igazoljuk, hogy L belső derivációi (tehát az $\text{ad}(L) := \{\text{ad } x \mid x \in L\}$ elemek) ideált alkotnak $\text{Der}(L)$ -ben.
11. Igazoljuk, hogy ha $\dim L = 3$ és $L = [LL]$, akkor L egyszerű.
12. Definiáljuk egy $K \leq L$ részalgebra $N_L(K)$ normalizátorát és $C_L(K)$ centralizátorát a következőképpen:

$$N_L(K) := \{x \in L \mid [xK] \subset K\}; \quad C_L(K) := \{x \in L \mid [xK] = 0\}.$$

Igazoljuk, hogy $C_L(K)$, $N_L(K)$ részalgebrái L -nek, valamint $C_L(K) \triangleleft N_L(K)$.

- 13.* Igazoljuk, hogy minden \mathbb{C} feletti három dimenziós egyszerű Lie algebra izomorf $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -vel.