Lie Algebrák, 1. Előadás
2024. február 16.

1. Alapok

Lie-algebra

Minvégig legyen T egy rögzített (egyelőre tetszőleges) test.

Definíció: T-algebra

Az A (nem feltétlen asszociatív) algebra T felett, ha A egy T vektortér, ellátva egy $A \times A \to A$ bilineáris művelettel (szorzás). Azaz $\forall\, a, b, c \in A$-ra és $\lambda \in T$-re:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad a(\lambda b) = \lambda(ab)$$
$$(b+c)a = ba + ca \qquad (\lambda b)a = \lambda(ba)$$

Két legfontosabb típus:

- A *asszociatív algebra*: A rajta értelmezett szorzás asszociatív;
- L *Lie-algebra*: Ekkor „szorzás” helyett a műveletet Lie-zárójelnek hívjuk. (Jele: $[ab]$) A Lie-zárójel a következő axiómákat tudja:
  (1) $[aa] = 0 \;\forall\, a \in L$;
  (2) $[[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0 \;\forall\, a, b, c \in L$. (Jacobi-azonosság)

Megjegyzések:

- (1)-ből és a bilinearitásból együttesen következik, hogy $[yx] = -[xy] \;\forall\, x, y \in L$-re (antikommutativitás). Továbbá, ha $\mathrm{char}(T) \neq 2$, akkor az antikommutativitás ekvivalens (1)-gyel.
- Csoportelméleti analógia: Egy G csoportban $x, y \in G$-re legyen $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ (kommutátor). Ekkor
  - $[x, x] = 1 \;\forall\, x \in G$;
  - $[[x, y^{-1}], z]^y [[y, z^{-1}], x]^z [[z, x^{-1}], y]^x = 1$ (Hall–Witt azonosság).
- Általában véges dimenziós Lie-algebrákkal foglalkozunk.
- Néhány általános tétel után leginkább a $T = \mathbb{C}$ esettel foglalkozunk.

Példák:

- Kommutatív (Abel-féle) Lie-algebra: L tetszőleges vektortér, és $[xy] = 0 \;\forall\, x, y \in L$-re.
- $L = \mathbb{R}^3$, és $[xy] = x \times y$ (ahol $\times$ a vektoriális szorzat).

Algebrák megadása struktúra konstansokkal

- Legyen A vektortér T felett. Választva egy $b_1, \ldots, b_n \in A$ bázist, egy $A \times A \to A$ bilineáris függvény egyértelműen meghatározott a
$$b_i b_j = \sum_k \gamma_{ij}^k b_k \;\; (1 \leq i, j, k \leq n) \quad \text{egyenletekkel.}$$
- Megfordítva, tetszőleges $\gamma_{ij}^k \in T$, $(1 \leq i, j, k \leq n)$ testelemek a fenti egyenletekkel meghatároznak egy (általános) algebrát.
- A γ_{ij}^k testelemek neve (Az A algebra $b_1, \ldots, b_n$ bázisához tartozó) *struktúra konstansok*.
- Ahhoz, hogy az így kapott algebra Lie-algebra legyen, elég az axiómák teljesülését a báziselemeken megkövetelni, ami a következő egyenleteket jelenti:
$$\gamma_{ii}^m = 0 = \gamma_{ij}^m + \gamma_{ji}^m \qquad \forall\, 1 \leq i, j, m \leq n;$$
$$\sum_s (\gamma_{ij}^s \gamma_{sk}^m + \gamma_{jk}^s \gamma_{si}^m + \gamma_{ki}^s \gamma_{sj}^m) = 0 \qquad \forall\, 1 \leq i, j, k, m \leq n;$$

Részalgebra, ideál, faktoralgebra, homomorfizmus...

Definíciók:

- *Alterek Lie zárójele:* Ha $U, V \subset L$ két altér, akkor legyen $[UV] = \left\{ \sum_i u_i v_i \,|\, u_i \in U,\, v_i \in V \right\}$ az összes $[uv]$ $(u \in U,\, v \in V)$ alakú Lie-zárójelek által generált altér.
- A $K \subseteq L$ *részalgebrája* az L-nek, ha K altér, és $x, y \in K \Rightarrow [xy] \in K$, azaz, ha $[KK] \subseteq K$.
- Az $I \subseteq L$ *ideálja* az L-nek (jele: $I \lhd L$), ha I altér, és $x \in I$, $y \in L \Rightarrow [xy] \in I$, azaz, ha $[IL] \subseteq I$. (Megjegyzés: Az antikommutativitás miatt nincs külön bal- és jobbideál.)
- Ha $I \lhd L$, akkor definiálhatjuk az L/I *faktoralgebrát*: Vesszük az $L/I = \{x + I \,|\, x \in L\}$ faktorteret, és ellátjuk az $[x + I, y + I] := [xy] + I$ Lie-zárójellel.
- Ha L_1 és L_2 Lie-algebrák, akkor egy $\varphi : L_1 \to L_2$ *homomorfizmus* alatt egy $\varphi : L_1 \to L_2$ lineáris leképezést értünk, melyre $\varphi([xy]) = [\varphi(x)\varphi(y)]$ minden $x, y \in L_1$-re.
- $\varphi : L_1 \to L_2$ *izomorfizmus*, ha bijektív homomorfizmus; $L_1 \simeq L_2$, ha létezik $\varphi : L_1 \to L_2$ izomorfizmus.

A „szokásos" tételek

Tétel.

- Ha $\varphi : L_1 \to L_2$ homomorfizmus, akkor $\ker(\varphi) \lhd L_1$, $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq L_2$ részalgebra, és $L_1/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$.
- Az L/I részalgebrái/ideáljai megfelelnek az L-nek az I-t tartalmazó részalgebráinak/ideáljainak.
- Ha $I \subset J$ ideáljai L-nek, akkor $(L/I)/(J/I) \simeq L/J$.
- Ha $K \subset L$ részalgebra, és $I \lhd L$, akkor $K+I \subset L$ részalgebra, $K \cap I \lhd K$, valamint $(K+I)/I \simeq K/(K \cap I)$.
- Ha I és J ideáljai L-nek, akkor $I + J$ és $[IJ]$ is ideáljai L-nek.

Definíció (Direkt összeg):

Ha $L_1, \ldots, L_k$ Lie-algebrák, akkor definiálhatjuk az $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ *direkt összegük*et:

- Mint vektortér megegyezik a vektortér értelemben vett direkt összeggel;
- A Lie-zárójelet komponensenként végezzük, azaz:

$$[(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)]_L = ([x_1 y_1]_{L_1}, \ldots, [x_k y_k]_{L_k}).$$

2. Lineáris és klasszikus Lie-algebrák

Az általános lineáris Lie-algebra

Definíció:

- Legyen V egy vektortér T felett (általában véges dimenziós).
- Jelölje $\mathrm{End}(V)$ a V lineáris transzformációinak (asszociatív) algebráját.
- Új művelet $\mathrm{End}(V)$-n:
$$x, y \in \mathrm{End}(V)\text{-re legyen } [x, y] := xy - yx.$$
- Ezzel a művelettel az $\mathrm{End}(V)$-ből Lie-algebrát kapunk. Neve *általános lineáris Lie-algebra*, jele $\mathfrak{gl}(V)$.

Megjegyzés: A szokásos módon rögzítve V egy bázisát, $\mathfrak{gl}(V)$ azonosítható (izomorf) a $\mathfrak{gl}(n, T)$ mátrix Lie-algebrával, ahol $n = \dim_T(V)$ és $[A, B] = AB - BA$ minden $A, B \in \mathfrak{gl}(n, T)$-re.

Ha $\{E_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq n\}$ a $\mathfrak{gl}(n, T)$ szokásos bázisa, akkor

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}.$$

Lineáris Lie-algebrák, reprezentációk

Definíció.

- A $\mathfrak{gl}(V)$ részalgebráit *lineáris Lie-algebráknak* hívjuk.
- Egy L Lie-algebra egy *reprezentációján* egy $L \to \mathfrak{gl}(V)$ homomorfizmust értünk, ahol V vektortér T felett (nem feltétlen véges dimenziós).

Tétel: Ado–Iwasawa (NB) Minden véges dimenziós Lie-algebrának van hű véges dimenziós reprezentációja.

- Más megfogalmazásban: Minden véges dimenziós Lie-algebra izomorf egy alkalmas V véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris Lie-algebrával.

A speciális lineáris algebra

$A_\ell = A_\ell(T)$ $(\ell \geq 1)$: Legyen V a T feletti $\ell+1$ dimenziós vektortér. Az $A_\ell := \mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}$ (vagy $\mathfrak{sl}(\ell+1, T)$) részalgebrája $\mathfrak{gl}(V)$-nek, neve *speciális lineáris algebra*.

Állítás.

- $\mathfrak{sl}(\ell+1, T)$ egy bázisa $\{E_{ij} \mid i \neq j\} \cup \{h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \mid 1 \leq i \leq \ell\}$, így $\dim(\mathfrak{sl}(\ell+1,T)) = \ell^2 + 2\ell$.
- $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$.

A szimplektikus algebra

C_ℓ $(\ell \geq 2)$: Legyen V a T feletti 2ℓ dimenziós vektortér, és $f : V \times V \to T$ nem elfajuló szimplektikus bilineáris forma V-n.

A szimplektikus algebra: $C_\ell := \mathfrak{sp}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(x(u), v) + f(u, x(v)) = 0 \ \forall\, u, v \in V\}$

Alkalmas bázisban f mátrixalakja $s = \begin{pmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{pmatrix}$.

Ebben a bázisban

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2\ell, T) &= \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell, T) \mid sx = -x^T s\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \mid m, n, p, q \in \mathfrak{gl}(\ell, T),\ n^T = n,\ p^T = p,\ m^T = -q \right\}. \end{aligned}$$

$\dim(\mathfrak{sp}(2\ell, T)) = 2\ell^2 + \ell$.

Az ortogonális algebra

Legyen V a T test ($\mathrm{char}(T) \neq 2$) feletti véges dimenziós vektortér és $f : V \times V \to T$ nem elfajuló szimmetrikus bilineáris forma V-n.

Az $\mathfrak{so}(V)$ *ortogonális algebra:* $\mathfrak{so}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(x(u), v) + f(u, x(v)) = 0 \ \forall\, u, v \in V\}$

Ha T algebrailag zárt, csak egyféle ilyen f van V-n (Van ONB). $\dim(V)$ paritása szerint két esetet különböztetünk meg.

$B_\ell = \mathfrak{so}(2\ell+1, T)$: Legyen $\dim(V) = 2\ell + 1$.

Alkalmas bázisban f mátrixalakja $s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ebben a bázisban

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(2\ell+1, T) = \Bigg\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix} &\mid m, n, p, q \in \mathfrak{gl}(\ell, T), \\ & n^T = -n,\ p^T = -p,\ m^T = -q,\ c_1 = -b_2^T,\ c_2 = -b_1^T \Bigg\}. \end{aligned}$$

$\dim(\mathfrak{so}(2\ell+1, T) = 2\ell^2 + \ell$.

$D_\ell = \mathfrak{so}(2\ell, T)$: Legyen $\dim(V) = 2\ell$.

Ekkor alkalmas bázisban f mátrixalakja $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{smallmatrix}\right)$, és $\dim(\mathfrak{so}(2\ell, T) = 2\ell^2 - \ell$.

3. Derivációk

Derivációk

Definíció.

- Legyen A tetszőleges (nem feltétlen asszociatív, vagy Lie-) algebra. A $\delta \in \mathrm{End}(A)$ *derivációja* A-nak, ha teljesíti a Leibniz szabályt:
$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)\ \forall\, a, b \in A\text{-ra}.$$
- Az A összes derivációjának halmaza
$$\mathrm{Der}(A) = \{\delta \in \mathrm{End}(A) \,|\, \delta \text{ derivációja } A\text{-nak.}\}$$

Állítás. $\mathrm{Der}(A)$ részalgebrája $\mathfrak{gl}(A)$-nak.

Az nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Der}(A)$ altere $\mathfrak{gl}(A)$-nak.

Az ad leképezés. Belső derivációk.

- Legyen L egy Lie-algebra. Felhasználva az antikommutativitást, a Jacobi-azonosság átfogalmazható:
$$\begin{aligned} &[[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0 \\ \iff\ &[a[bc]] = [[ab]c] + [b[ac]] \\ \iff\ &[[ab]c] = [a[bc]] - [b[ac]] \end{aligned}$$
- Minden $a \in L$-re definiáljuk az $\mathrm{ad}\, a \in \mathfrak{gl}(L)$ leképezést az $\mathrm{ad}\, a(x) := [ax]$ képlettel.
- Ha $a \in K \subset L$ (ahol K részalgebra), akkor $\mathrm{ad}_K\, a$ és $\mathrm{ad}_L\, a$ jelöli a K-n illetve L-en vett $\mathrm{ad}\, a$ leképezéseket.
- *Állítás:* $\mathrm{ad}\, a$ derivációja L-nek:
$$\mathrm{ad}\, a([xy]) = [a[xy]] = [[ax]y] + [x[ay]] = [\mathrm{ad}\, a(x)\, y] + [x\ \mathrm{ad}\, a(y)]$$
- *Állítás:* $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L)$ homomorfizmus (adjungált reprezentáció):
$$\begin{aligned} \mathrm{ad}[ab](x) &= [[ab]x] = [a[bx]] - [b[ax]] = \mathrm{ad}\, a\, \mathrm{ad}\, b(x) - \mathrm{ad}\, b\, \mathrm{ad}\, a(x) \\ &= [\mathrm{ad}\, a, \mathrm{ad}\, b](x) \end{aligned}$$
- Az $\mathrm{ad}\, a$ $(a \in L)$ leképezéseket az L *belső derivációi*nak nevezzük.
- Az L nem belső derivációit *külső derivációknak* nevezzük.
- Az $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L)$ leképezés magja
$$Z(L) = \{a \in L \,|\, [ab] = 0\ \forall\, b \in L\}.$$
$Z(L)$ az L *centruma.* $Z(L) \lhd L$.
- Következmény: Ha $Z(L) = 0$, (például, ha L egyszerű), akkor $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ hű reprezentáció (Ado–Iwasawa speciális eset)

Derivációk és automorfizmusok

Legyen L (véges dimenziós) lie algebra T felett. Kérdés: Hogyan találhatunk automorfizmusokat?

Példa: Ha $L \subset \mathfrak{gl}(V)$, és $g \in GL(V)$, melyre $gLg^{-1} = L$, akkor $x \to gxg^{-1}$ $(x \in L)$ automorfizmusa L-nek.

Állítás: Legyen $\mathrm{char}(T) = 0$, és $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ nilpotens, azaz $\delta^k = 0$ valamely k-ra. Ekkor
$$\exp \delta := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\delta^i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\delta^i$$
automorfizmusa L-nek.

Bizonyítás.

- Az világos, hogy $\exp\delta$ lineáris transzformáció.
- Használjuk a magasabbrendű deriválásokra szokásos Leibniz-szabályt (indukcióval adódik):

$$\frac{\delta^n}{n!}([xy]) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\delta^i}{i!}x, \frac{\delta^{n-i}}{(n-i)!}y\right]$$

- Megmutatjuk, hogy $\exp\delta$ megőrzi a Lie-zárojelet (itt ∞ helyett k is írható).

$$\begin{aligned}[\exp\delta(x), \exp\delta(y)] &= \Big[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\delta^i}{i!}x, \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\delta^j}{j!}y\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\left[\frac{\delta^i}{i!}x, \frac{\delta^j}{j!}y\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{n!}([xy]) = \exp\delta([xy]).\end{aligned}$$

- $\exp(\delta)$ bijektív: Mivel $\exp(\delta) = 1+\eta$ alakú, ahol $\eta^k = 0$, ezért $(\exp(\delta))^{-1} = 1 - \eta + \eta^2 - \ldots \pm \eta^{k-1}$.

Megjegyzés. $T = \mathbb{R}$ esetén $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ konvergens minden $x \in \mathrm{End}(L)$-re $\Rightarrow$ a δ-ra vonatkozó nilpotens feltétel nem szükséges.